ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΜΙΓΑΔΙΚΗΣ / 19/12/07 / Μάθημα

9-4
Γ21

4) $\gamma : [\alpha,\beta] \to \Omega$
$f, g : \Omega \to \mathbb{C}$
$fg|_\gamma = (f\cdot g)(\gamma(b)) - (fg)(\gamma(a))$

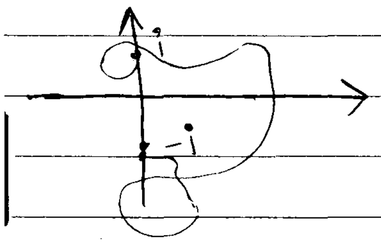
$(fg)'(z) = f'(z)\cdot g(z) + f(z)\cdot g'(z) \Rightarrow f(z)g'(z) = (fg)'(z) - f'(z)g(z) \Rightarrow$

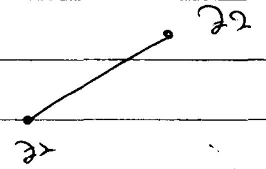
$\Rightarrow \int_\gamma f(z)g'(z)\,dz = \int_\gamma (fg)'(z) - f'(z)g(z)\,dz =$

$= \int_\gamma (fg)'(z)\,dz - \int_\gamma f'(z)g(z)\,dz =$

$= [fg]_\gamma - \int_\gamma f'(z)g(z)\,dz$

Σ) $\int_\gamma (\log z)^2\,dz$, $\gamma : i \to -i$ με $[-\infty,0] \cap \gamma = \emptyset$





$\int_{[z_1,z_2]} f(z)\,dz$

$\gamma : [\alpha,\beta] \to \mathbb{C}$
$\gamma(\alpha) = z_1$
γ' συνεχής
$\gamma' \neq 0$
και $\gamma([\alpha,\beta]) = [z_1,z_2]$

όλες οι γ που διατρέχουν τις δίνουν το ίδιο ολοκλήρωμα $\int_\gamma f(z)\,dz$

$\int_\gamma (\log z)^2\,dz =$

$= \int_\gamma (\log z)^2 z'\,dz =$

$= \left[(\log z)^2 z\right]_\gamma - \int_\gamma z\cdot((\log z)^2)'\,dz =$

$\left(z(\log z)^2\right)' = z\cdot 2\log z\cdot \frac{1}{z} = 2\cdot \log z$

Άρα: $= \left[(z(\log z)^2\right]_\gamma - 2\int_\gamma \log z\,dz =$ (1)

$\int_\gamma \log z\,dz = \int_\gamma (\log z)\, z'\,dz = ((\log z)\cdot z)\Big]_\gamma - \int_\gamma z \log' z\,dz$

και $z\cdot \log' z = z\cdot \frac{1}{z} = 1$.

Άρα $= (\log z)\, z\Big]_\gamma - \int_\gamma 1\,dz$

Και $\int_\gamma 1\,dz = \int_\gamma z'\,dz = i-(-i) = 2i$

Δηλαδή $(\log z \cdot z)\Big]_\gamma - \int_\gamma 1\,dz = (\log z)\cdot z\Big]_\gamma - 2i \quad (2)$

• $\left[z\log z\right]_\gamma = i\log i - (-i)\log(-i) = i\cdot i\frac{\pi}{2} - (-i)\left(-i\frac{\pi}{2}\right) = -\pi/2 + \pi/2 = 0$.

$\Big($ $\log i = \log|i| + i\arg(i) = i\frac{\pi}{2}$

$\log(-i) = \log|-i| + i\arg(-i) = -i\frac{\pi}{2}$

το arg το υπολογίζουμε στο $(-\pi,\pi)$ $\Big)$

• $\left[z(\log z)^2\right]_\gamma = i(\log i)^2 - (-i)(\log(-i))^2$

$= i(i\pi/2)^2 - (-i)(-i\pi/2)^2 = -i\pi^2/4 - i\pi^2/4 = -i\pi^2/2$

Από (1) $= -i\frac{\pi^2}{2} - 2(-2i) = \boxed{-i\frac{\pi^2}{2} + 4i}$

5) f ακέραια, $a,b\in\mathbb{C}$, $a\neq b$, $r>\max\{|a|,|b|\}$.

ν. υπολογισθεί $S = \int_{C(0,r)} \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)}\,dz$

$\frac{1}{(z-a)(z-b)} = \frac{A}{z-a} + \frac{B}{z-b} = \frac{A(z-b)+B(z-a)}{(z-a)(z-b)} \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 = A(z-b) + B(z-a) =$

$z=a \Rightarrow 1 = A(a-b) \Rightarrow A = \frac{1}{a-b}$

$z=b \Rightarrow 1 = B(b-a) \Rightarrow B = \frac{1}{b-a}$

... Άρα:

$$\frac{f(z)}{(z-a)(z-b)} = \frac{f(z)}{(a-b)(z-a)} + \frac{f(z)}{(b-a)(z-b)}$$

$$\int = \int_{C(0,r)} \frac{f(z)}{(a-b)(z-a)}dz + \int_{C(0,r)} \frac{f(z)}{(b-a)(z-b)}dz =$$

$$= \frac{1}{a-b}\int_{C(0,r)} \frac{f(z)}{z-a}dz + \frac{1}{b-a}\int_{C(0,r)} \frac{f(z)}{z-b}dz$$

$$f(a)\cdot \mathrm{Ind}_a \gamma = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}dz \overset{\mathrm{Ind}\,\gamma = 1}{\Longrightarrow}$$

$$f(a)\cdot 2\pi i = \int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}dz$$, όμοια για το $\int_{C(0,r)} \frac{f(z)}{z-b}dz$ $\underset{\shortparallel}{}$ $f(b)\cdot 2\pi i$

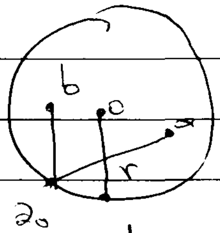
Άρα $\int = \frac{1}{a-b}\cdot 2\pi i\, f(a) + \frac{1}{b-a}\, 2\pi i\,(f(b)) =$

$$= 2\pi i\,\frac{(f(a)-f(b))}{a-b}$$

Έχουμε a, β, $a \neq \beta$, $r > \max\{|a|, |\beta|\}$

$$\left|\int_{C(0,r)} \frac{f(z)}{(z-a)(z-\beta)}dz\right| \leq \text{μήκος}(C(0,r))\cdot \sup_{z\in C(0,r)}\left|\frac{f(z)}{(z-a)(z-\beta)}\right| =$$

$$= 2\pi r\cdot \sup_{z\in C(0,r)}\left|\frac{f(z)}{(z-a)(z-\beta)}\right|$$



όπου

$$\left|\frac{f(z_0)}{(z_0-a)(z_0-b)}\right| \leq \left|\frac{f(z_0)}{(r-|a|)(r-|b|)}\right|$$

$$|z_0 - a| \geq \big||z_0| - |a|\big| = \big|r - |a|\big| =$$

$$= r - |a| \Rightarrow \frac{1}{|z_0-a|} \leq \frac{1}{r-|a|}$$

όμοια $\frac{1}{|z_0-b|} \leq \frac{1}{r-|b|}$

15

No.

Date

Υπόθεση: f φραγμένη $\exists\, M>0$ ώστε $|f(z)| < M \ \forall z \in \mathbb{C}$

Τότε $\left| \dfrac{f(z_0)}{(r-|\alpha|)(r-|b|)} \right| \leq \dfrac{M}{(r-|\alpha|)(r-|b|)}$

Έχουμε:

$$|\zeta| \leq 2\pi r \cdot \frac{M}{(r-|\alpha|)(r-|b|)} \xrightarrow{r\to\infty} 0 \quad \forall\, r > \max\{|\alpha|, |b|\}$$

Επομένως

$|\zeta| = 0 \Rightarrow \zeta = 0$

Δηλαδή $\quad 2\pi i \dfrac{f(\alpha)-f(b)}{\alpha-b} = 0 \Rightarrow f(\alpha) = f(b).$

Τα α, β ήταν τυχαία, άρα δείξαμε το Θ. Liouville.

6) $|\alpha| \neq |b|$. $\displaystyle\int_\gamma \frac{1}{\alpha z+b}\, dz \quad \gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{C}$ με $\gamma(t) = e^{it}$

Αν $\alpha = 0$

$\alpha z + b = b \quad \displaystyle\int_\gamma \frac{1}{b}\, dz = 0.$

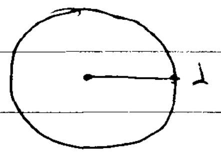
Αν $\alpha \neq 0$. $f(z) = \dfrac{1}{\alpha z+b} \quad D = \mathbb{C} - \{-b/\alpha\}$

Πρέπει $-b/\alpha \notin \gamma$

Αν $-b/\alpha \in \gamma = C(0,1)$ τότε $\left|\dfrac{-b}{\alpha}\right| = 1 \Rightarrow |\alpha| = |b|$ άτοπο από την υπόθεση.

$$f(z) = \frac{1}{\alpha z+b} = \frac{1}{\alpha(z+\frac{b}{\alpha})} = \frac{1}{\alpha(z-(-\frac{b}{\alpha}))}$$

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \int \frac{1}{\alpha(z-(-b/\alpha))}\, dz = \frac{1}{\alpha}\int_\gamma \frac{1}{z-(-b/\alpha)}\, dz$$



• Αν $|-b/\alpha| > 1 \Leftrightarrow |b| > |\alpha|$ τότε $\mathrm{Ind}_\gamma(-b/\alpha) = 0$

και άρα $\displaystyle\int_\gamma \frac{1}{z-(-b/\alpha)}\, dz = 0$

• Αν $|-b/\alpha| < 1 \Leftrightarrow |b| < |\alpha|$ τότε $\mathrm{Ind}_\gamma(-b/\alpha) = 1$

και άρα $\displaystyle\int_\gamma \frac{1}{z-(-b/\alpha)}\, dz = 2\pi i$

$$\int_\gamma \frac{1}{\alpha z + b}\,dz = \begin{cases} 0, & \text{αν } \alpha = 0 \\ 0, & \text{αν } |b| > |\alpha| \\ \dfrac{2\pi i}{\alpha}, & \text{αν } |b| < |\alpha| \end{cases}$$

γ) $p(z)$ μη σταθερό. Ν.Σ.Ο. $\lim_{|z|\to\infty} \frac{1}{|p(z)|} = 0$

~~Συνέχεια~~ Ν.Σ. Θεμ. Θεωρ. Αλγ.

$$p(z) = \alpha_n z^n + \alpha_{n-1} z^{n-1} + \dots + \alpha_1 z + \alpha_0 =$$
$$= z^n \underbrace{\left(\alpha_n + \frac{\alpha_{n-1}}{z} + \dots + \frac{\alpha_1}{z^{n-1}} + \frac{\alpha_0}{z^n}\right)}_{\downarrow\ \alpha_n} \to \infty$$

$$\frac{\alpha_i}{z^{n-k}} \to 0$$

$\exists\ P$, P μη σταθερό, δεν έχει ρίζες

$g(z) = \frac{1}{p(z)}$

$\downarrow$ g ακέραια και $\frac{1}{p(z)} \xrightarrow{z\to\infty} 0$ αφού $p(z) \to \infty$

Για $\varepsilon = 1$, $\exists\ R > 0$ ώστε $\forall z \in \mathbb{C}$ με $|z| > R$

$$\left|\frac{1}{p(z)}\right| < 1$$

Επομένως η $\frac{1}{p(z)}$ είναι φραγμένη στο $\mathbb{C} \setminus D(0,R)$.

Στον $D(0,R)$ η $\frac{1}{p(z)}$ είναι συνεχής (ως ακέραια).
Στο $\overline{D}(0,R)$ που είναι συμπαγές η $\frac{1}{p(z)}$ έχει μέγιστη τιμή.
$\exists\ M_0 > 0 : \left|\frac{1}{p(z)}\right| < M_0\ \forall\ z \in \overline{D}(0,R)$.

Αν $M_1 = \max\{1, M_0\}$.
Οπότε η $\frac{1}{p(z)}$ είναι φραγμένη σ' όλο το $\mathbb{C}$

Από Θ. Liouville έπεται $\frac{1}{p(z)}$ σταθερή: $\frac{1}{p(z)} = c_0\ \forall\ z \in \mathbb{C} \Rightarrow$
$p(z) = \frac{1}{c_0}\ \forall\ z \in \mathbb{C}$

No.
Date

8) $\int_0^{2\pi} e^{e^{it}}\,dt$

Θεωρούμε την $\frac{e^z}{z}$ $\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{C}$
$\gamma(t) = e^{it}$

$\int_\gamma \frac{e^z}{z-0}\,dz = 2\pi i \exp(0) = 2\pi i$ (1)

$\int_\gamma \frac{e^z}{z}\,dz = \int_0^{2\pi} \frac{e^{e^{it}}}{e^{it}} (e^{it})'\,dt = \int_0^{2\pi} \frac{e^{e^{it}}}{e^{it}}\, i e^{it}\,dt =$

$= i\int_0^{2\pi} e^{e^{it}}\,dt$ (2)

Από (1) και (2): $i\int_0^{2\pi} e^{e^{it}}\,dt = 2\pi i \Rightarrow \int_0^{2\pi} e^{e^{it}}\,dt = 2\pi$.

9) f ακέραια $|f(z)| \le A(1+|z|^s)$ $\forall z \in \mathbb{C}$
$A>0$, $s>0$ τότε f πολυώνυμο με βαθμό $\le s$.

$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, $c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$, $n=0,1,2,\dots$

$\cancel{f^{(n)}(0) = \frac{n!}{2\pi i}\int \frac{f(z)}{z}\,dz}$ $\gamma = C(0,R)$

$|f^{(n)}(0)| \le n! \sup_{z\in C(0,R)} \frac{|f(z)|}{R^n}$ $\Leftrightarrow$

$|c_n| \le \sup_{z\in\gamma} \frac{|f(z)|}{R^n}$

Όμως $f(z_0) \le A(1+|z_0|^s) = A(1+R^s) =$ $(z_0 \in \gamma)$
$= R^n A\left(\frac{1}{R^n} + R^{s-n}\right)$

Θεωρώ n_0, s_0, R_0

$\forall z \in C(0,R_0)$ $|f(z)| \le R_0^{n_0} \cdot A\left(\frac{1}{R_0^{n_0}} + \frac{1}{R_0^{n_0-s_0}}\right)$.

$\frac{1}{R_0^{n_0}} \cdot \sup |f(z)| \le A\left(\frac{1}{R_0^{n_0}} + \frac{1}{R_0^{n_0-s_0}}\right)$.

$\cdot$ $|c_{n_0}| \le A\left(\frac{1}{R_0^{n_0}} + \frac{1}{R_0^{n_0-s_0}}\right)$.

$\forall R$ έχουμε: $|c_{n_0}| \le A\left(\frac{1}{R^{n_0}} + \frac{1}{R^{n_0-s_0}}\right) \xrightarrow{R\to\infty} 0$ για $n_0 > s_0$.

Πράγματι $f(z) = c_0 + c_1 z + \ldots + c_s z^s$

Παρατήρηση για άσκηση 8

$e^{e^{it}} = e^{\cos t + i\sin t} = e^{\cos t}\left(\cos(\sin t) + i\sin(\sin t)\right)$

$$\underbrace{\int_0^{2\pi} e^{e^{it}}\,dt}_{=2\pi} = \int_0^{2\pi} e^{\cos t}\left(\cos(\sin t)\right)dt + i\underbrace{\int_0^{2\pi} e^{\cos t}\sin(\sin t)}_{=0}$$

Άρα

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos t}\left(\cos(\sin t)\right)dt = 2\pi$$

Μπαλικής Ασκήσεις / 09/01/08 / Μιγαδική

Δεύτερη Ώρα:

20)

$f(z)g(z)=0 \ \forall z \in \Omega$ ή $f=0$ ή $g=0$ (Ω τόπος)

$\forall z \in \Omega$ ή $f(z)=0$ ή $g(z)=0$

Έστω $z_0 \in \Omega$ και $z_n \to z_0$

z_n διάφοροι ανά δύο

$z_n \in \Omega$

$\forall n=1,2,\ldots$ έχουμε: $f(z_n)=0$ ή $g(z_n)=0$

Ορίζουμε $A_1=\{n \in \mathbb{N} : f(z_n)=0\}$

$A_2=\{n \in \mathbb{N} : g(z_n)=0\}$

$A_1 \cup A_2 = \mathbb{N}$. Άρα A_1 είναι άπειρο ή A_2 είναι άπειρο

Έστω A_1 άπειρο. Τι σημαίνει αυτό;

$A_1=\{n_1,n_2,\ldots\}$

$A_1=\{n_j, j=1,2,\ldots\}$

$n_{j+1}>n_j \ \forall j=1,2,\ldots$

Έχουμε $f(z_{n_j})=0 \ \forall j=1,2,\ldots$

Αφού $z_n \to z_0$

$z_{n_j} \to z_0 \in \Omega$.

Από αρχή αναλυτικής συνέχισης έπεται ότι $f\equiv 0$ στο Ω

ή $f(z_{n_j}) \to f(z_0)=0$

Άρα το z_0 είναι σσ των $D=\{z \in \Omega : f(z)=0\}$

Άρα $D' \neq 0 \Rightarrow f=0$

21) f ακέραια

$|f(z)| \le |\sin z| \ \forall z \in \mathbb{C}$

Τότε $\exists$ c σταθερός στο $\mathbb{C}$ ώστε $f(z)=c\sin z \ \forall z \in \mathbb{C}$

$\sin z = 0 \Leftrightarrow z = k\pi \;,\; k \in \mathbb{Z}$

Ορίζουμε την

$\dfrac{f(z)}{\sin z}$ στο $\mathbb{C} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\} = \mathcal{D}$

και $\left|\dfrac{f(z)}{\sin z}\right| \leq 1 \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

$g(z) = \dfrac{f(z)}{\sin z}$

Οι αριθμοί $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ είναι μεμονωμένες ανωμαλίες για την g.
Έστω $k_0\pi$, $k_0 \in \mathbb{Z}$ και θεωρώ $D(k_0\pi, \varepsilon_0) \subset \mathcal{D}$
Τότε η g είναι φραγμένη στο $D(k_0\pi, \varepsilon_0)$
Άρα από γνωστό θεώρημα η g έχει επουσιώδη ανωμαλία στο $k_0\pi$
Άρα $\exists$ το $\lim_{z \to k_0\pi} g(z)$. Άρα μπορώ να επεκτείνω την g ώστε να είναι ολόμορφη στο $D(k_0\pi, \varepsilon_0)$
Αυτό ισχύει $\forall k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
Άρα η g είναι ακέραια συνάρτηση

Ορίζω $G(z) = \begin{cases} g(z), & z \in D \\ \lim_{z \to k\pi} g(z) & z = k\pi \end{cases}$

Τότε $|G(k\pi)| \leq 1 \quad \forall k \in \mathbb{Z}$
Άρα τελικά η g είναι σταθερή

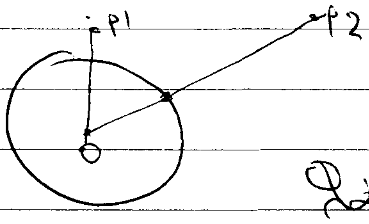
$\dfrac{f(z)}{\sin z} = c \Rightarrow f(z) = c\sin z \quad \forall z \in D$

Από αρχή αναλυτικής συνέχισης $\Rightarrow f(z) = c\sin z \;\; \forall z \in \mathbb{C}$
$|c| \leq 1$

22) $\dfrac{1}{1 - z - z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \;,\; \rho = ;$

Κατ' αρχήν πρέπει το βρίσκω να βρω μηδενικά του παρονομαστή

Έστω ρ1, ρ2 οι ρίζες. Έτσι στον $B(0,r)$ είναι ολόμορφη η συνάρτηση και άρα αναπτύσσεται σε δυναμοσειρά.



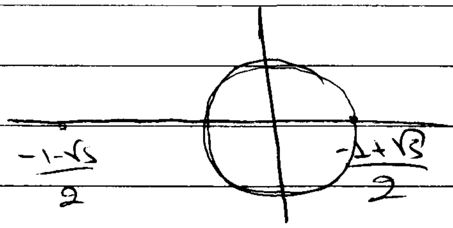
Φαίνεται ότι $\rho = |\rho_1|$

Έχουμε το πολυώνυμο $1 - z - z^2$

$$\Delta = (-1)^2 - 4(-1) = 1 + 4 = 5$$

$$\rho_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{-2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}, \quad \rho_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\rho_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$$



$$\rho = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

Θ' έστω $1 - z - z^2 = -(z-\rho_1)(z-\rho_2)$

$$\frac{1}{1-z-z^2} = \frac{1}{-(z-\rho_1)(z-\rho_2)}$$

$$\frac{1}{-(z-\rho_1)(z-\rho_2)} = -\left(\frac{A}{z-\rho_1} + \frac{B}{z-\rho_2}\right)$$

$$\frac{1}{z^2+z-1} = \frac{A}{z-\rho_1} + \frac{B}{z-\rho_2} = \frac{A(z-\rho_2) + B(z-\rho_1)}{(z-\rho_1)(z-\rho_2)} \Rightarrow \frac{1}{(\rho_1-\rho_2)(z-\rho_1)} + \frac{1}{(\rho_2-\rho_1)(z-\rho_2)} = \frac{1}{\rho_1-\rho_2}\left[\frac{1}{z-\rho_1} - \frac{1}{z-\rho_2}\right]$$

$\Rightarrow 1 = A(z-\rho_2) + B(z-\rho_1)$

Για $z = \rho_1$ έχουμε $A = \frac{1}{\rho_1-\rho_2}$

Για $z = \rho_2$ έχουμε $B = \frac{1}{\rho_2-\rho_1}$