Θεωρία Αναδρομής (ΑΛΜΑ), 4ο πακέτο ασκήσεων

1 Φεβρουαρίου 2024

1. Βρείτε δύο διαφορετικές TM M και N τέτοιες ώστε για κάθε $x \in \{0,1\}^*$ να ισχύει ότι $\phi_M(x) = \langle N \rangle$ και $\phi_N(x) = \langle M \rangle$.

2. Έστω $d(x)$ η βραχύτερη λέξη της μορφής $\langle M, w \rangle$ όπου η TM M με είσοδο w τερματίζει γράφοντας x στην ταινία της. Δείξτε ότι η συνάρτηση $K : \{0,1\}^* \to \mathbb{N}$, με $K(x) = |d(x)|$, δεν είναι υπολογίσιμη.

3. Δείξτε ότι η συνάρτηση K της προηγούμενης άσκησης είναι υπολογίσιμη ως προς τη γλώσσα HP.

4. Μια TM M ονομάζεται *ελαχιστική* αν κάθε TM M' με $L(M') = L(M)$ έχει περισσότερες καταστάσεις από την M. Υπάρχει άπειρο, αναδρομικά απαριθμήσιμο σύνολο κωδικοποιήσεων ελαχιστικών TM;

5. Θεωρήστε τη γλώσσα:

$$L = \{\langle M \rangle \in \{0,1\}^* \mid \forall w \in \{0,1\}^* \; (M(w) \downarrow \Leftrightarrow \; M(w^R) \downarrow)\}$$

   (α΄) Δείξτε *χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Αναδρομής* ότι δεν είναι αναδρομικά απαριθμήσιμη.

   (β΄) Ισχύει ότι $L \in \Pi_2^0$;

6. Δείξτε για $n \geq 2$ τα ακόλουθα:

   (α΄) $\Sigma_n^0 = \mathsf{RE}^{HP_{n-1}}$

   (β΄) $\Delta_n^0 = \mathsf{REC}^{HP_{n-1}}$

   (γ΄) Κανένα από τα Π_n^0 και $\mathsf{RE}^{\overline{HP}_{n-1}}$ δεν είναι υποσύνολο του άλλου.

7. Κατατάξτε τη γλώσσα $L_\equiv = \{\langle M_1, M_2 \rangle \in \{0,1\}^* \mid L(M_1) = L(M_2)\}$ στην Αριθμητική Ιεραρχία.

8. Κατατάξτε τη γλώσσα:

$$L = \{\langle M \rangle \in \{0,1\}^* \mid L(M) \subseteq \mathsf{SQUARE}\}, \text{ όπου } \mathsf{SQUARE} = \{w \in \{0,1\}^* \mid |w| \text{ είναι τετράγωνο φυσικού αριθμού}\}$$

   στην Αριθμητική Ιεραρχία.

9. Δείξτε ότι η γλώσσα $L_\emptyset = \{\langle M \rangle \in \Sigma^* \mid L(M) = \emptyset\}$ είναι $\leq_m$-πλήρης για το Π_1^0.

10. Έστω A $\leq_m$-πλήρης γλώσσα για το Σ_n^0. Δείξτε ότι η γλώσσα $L_{\mathbb{N}}^A = \{\langle M \rangle \in \{0,1\}^* \mid |L(M^A)| \in \mathbb{N}\}$ είναι $\leq_m$-πλήρηςγια το Σ_{n+2}^0.