Θεωρία Αναδρομής (ΑΛΜΑ), 2ο πακέτο ασκήσεων

1 Δεκεμβρίου 2023

1. Δείξτε ότι για κάθε $b \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ η συνάρτηση $\mathsf{log}_b : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ με:
$$\mathsf{log}_b(x) = \begin{cases} \mathsf{max}\{n \in \mathbb{N} \mid b^n \mid x\} & , \text{ αν } x > 0 \\ 0 & , \text{ αλλιώς} \end{cases}$$
είναι πρωτογενώς αναδρομική.

2. Έστω $\mathsf{g} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ πρωτογενώς αναδρομική συνάρτηση. Δείξτε ότι η συνάρτηση:
$$f(x) = \begin{cases} 1 & , \text{ αν } g(i) < g(i+1) \text{ για όλα } 0 \leq i \leq x \\ 0 & , \text{ αλλιώς} \end{cases}$$
είναι πρωτογενώς αναδρομική.

3. Δείξτε ότι η συνάρτηση $- : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ με:
$$-(x,y) = \begin{cases} x - y & , \text{ αν } x \geq y \\ \bot & , \text{ αλλιώς} \end{cases}$$
είναι ελαχιστικά αναδρομική.

4. Δείξτε τα ακόλουθα:
   (α΄) Όλες οι πρωτογενώς αναδρομικές συναρτήσεις είναι ολικές συναρτήσεις.
   (β΄) Η κλάση των πρωτογενώς αναδρομικών συναρτήσεων είναι αριθμήσιμη [1].
   (γ΄) Υπάρχει συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ που δεν είναι ελαχιστικά αναδρομική.

5. Έστω συνάρτηση $g : \mathbb{N}^{m+1} \to \mathbb{N}$ [2]. Θεωρήστε την συναρτήση $f : \mathbb{N}^{m+1} \to \mathbb{N}$, με:
$$f(y, x_1, \ldots, x_m) = (\mu i \geq y)[g(i, x_1, \ldots, x_m) = 0]$$
και την αναδρομική εξίσωση:
$$h(y, x_1, \ldots, x_m) = \begin{cases} y & , \text{ αν } g(y, x_1, \ldots, x_m) = 0 \\ h(y+1, x_1, \ldots, x_m) & , \text{ αλλιώς} \end{cases}$$
Δείξτε ότι:
   (α΄) Η f είναι λύση της εξίσωσης.
   (β΄) Αν η f' είναι λύση της εξίσωσης τότε $f \subseteq f'$.

6. Έστω λ-όροι M, M', N, N' και μεταβλητή x. Εξετάστε αν ισχύουν τα ακόλουθα:
   (α΄) Αν $N \to_\beta N'$ τότε $M[x/N] \to_\beta M[x/N']$.
   (β΄) Αν $M \to_\beta^* M'$ και $N \to_\beta^* N'$ τότε $M[x/N] \to_\beta^* M'[x/N']$.

7. Βρείτε λ-όρους M, N με την ιδιότητα ότι κανένας τους δεν έχει β-κανονική μορφή αλλά ο λ-όρος MN έχει.

8. Βρείτε λ-όρο που ορίζει τη συνάρτηση $\mathsf{mult}(m,n) = m \cdot n$.

---

[1] Σε αυτό μπορεί να σας φανεί χρήσιμο η Πρόταση 3.3.12.
[2] Η g μπορεί να είναι και μερική συνάρτηση.

9. Βρείτε λ-όρο που ορίζει τη συνάρτηση $\mathsf{pd}(n) = \begin{cases} 0 & , \text{αν } n = 0 \\ n-1 & , \text{αλλιώς} \end{cases}$.

10. Βρείτε λ-όρο που ορίζει τη συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ με $f(x) = \begin{cases} 1 & , \text{αν } x = 0 \\ \bot & , \text{αλλιώς} \end{cases}$.