Θεμέλια των Μαθηματικών (2008–09)

Σχέσεις – Ασκήσεις

1. Κάποιος σας προτείνει τον εξής ορισμό του διατεταγμένου ζεύγους:

$$(x, y) = \{x, \{y\}\}.$$

Τι λέτε;

2. Δίνονται τα σύνολα A, B και C. Αποδείξτε τις ταυτότητες

$$\begin{aligned}(A \cup B) \times C &= (A \times C) \cup (B \times C)\\ (A \cap B) \times C &= (A \times C) \cap (B \times C)\\ A \times (B \cup C) &= (A \times B) \cup (A \times C)\\ A \times (B \cap C) &= (A \times B) \cap (A \times C).\end{aligned}$$

3. Εξετάστε αν ισχύουν οι ισότητες

$$\begin{aligned}(A \setminus B) \times C &= (A \times C) \setminus (B \times C)\\ (A \triangle B) \times C &= (A \times C) \triangle (B \times C).\end{aligned}$$

4. Δώστε παράδειγμα συνόλων A, B, C και D για τα οποία το $(A \times B) \cup (C \times D)$ είναι γνήσιο υποσύνολο του $(A \cup C) \times (B \cup D)$.

5. Ορίζουμε δύο σχέσεις $\boldsymbol{\rho}$ και $\boldsymbol{\sigma}$ στο $\mathbb{N}$ ως εξής:

$$(a, b) \in \rho \text{ αν και μόνο αν } a | b \text{ (ο } a \text{ είναι διαιρέτης του } b)$$

και

$$(a, b) \in \boldsymbol{\sigma} \text{ αν και μόνο αν } a^2 | b \text{ (ο } a^2 \text{ είναι διαιρέτης του } b).$$

Περιγράψτε με ιδιότητες διαιρετότητας τις σχέσεις $\boldsymbol{\rho} \cup \boldsymbol{\sigma}$, $\rho \cap \boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\rho} \setminus \boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\sigma} \setminus \boldsymbol{\rho}$.

6. Για καθεμιά από τις παρακάτω σχέσεις στο $\mathbb{R}$ εξετάστε αν είναι: (α) ανακλαστική, (β) συμμετρική, (γ) μεταβατική.

1. $x < y$.
2. $x \geq y$.
3. $|x - y| \leq 1$.
4. $|x - y| \leq 0$.
5. $x - y \in \mathbb{Q}$.
6. $x - y \notin \mathbb{Q}$.

7. Θεωρούμε δύο ανακλαστικές σχέσεις $\boldsymbol{\rho}$ και $\boldsymbol{\sigma}$ στο X. Δείξτε ότι οι σχέσεις $\boldsymbol{\rho} \cup \boldsymbol{\sigma}$ και $\boldsymbol{\rho} \cap \boldsymbol{\sigma}$ είναι επίσης ανακλαστικές.

8. Έστω $\boldsymbol{\rho}$ και $\boldsymbol{\sigma}$ δύο συμμετρικές σχέσεις στο σύνολο X. Εξετάστε αν οι σχέσεις $\boldsymbol{\rho} \cup \boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\rho} \cap \boldsymbol{\sigma}$ και $\boldsymbol{\rho} \setminus \boldsymbol{\sigma}$ είναι επίσης συμμετρικές.

9. Ορίζουμε μια σχέση $\boldsymbol{\sigma}$ στο $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ (δηλαδή, $\boldsymbol{\sigma} \subseteq (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \times (\mathbb{N} \times \mathbb{N})$), ως εξής:

$$(m,n)\boldsymbol{\sigma}(r,s) \quad \text{αν} \quad m+s=r+n.$$

Δείξτε ότι η $\boldsymbol{\sigma}$ είναι σχέση ισοδυναμίας. Οι κλάσεις ισοδυναμίας αυτής της σχέσης αντιστοιχούν με φυσιολογικό τρόπο στα στοιχεία ενός γνωστού συνόλου. Ποιό είναι αυτό;

10. Ορίζουμε μια σχέση $\boldsymbol{\sigma}$ στο σύνολο $B = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : y \neq 0\}$ ως εξής:

$$(m,n)\boldsymbol{\sigma}(r,s) \quad \text{αν} \quad m \cdot s = n \cdot r.$$

Εξετάστε αν η $\boldsymbol{\sigma}$ είναι σχέση ισοδυναμίας.

11. Το επιχείρημα που ακολουθεί αποδεικνύει ότι αν μια σχέση $\sim$ είναι συμμετρική και μεταβατική, τότε είναι και ανακλαστική. Εξετάστε αν είναι σωστό, και αν όχι, εξηγήστε ποιό είναι το λάθος.

> Έστω $a \sim b$. Η $\sim$ είναι συμμετρική, συνεπώς $b \sim a$. Αφού η $\sim$ είναι μεταβατική, από τις $a \sim b$ και $b \sim a$ συμπεραίνουμε ότι $a \sim a$. Άρα, η $\sim$ είναι ανακλαστική.

12. Να αποδειχθεί ότι μια σχέση $\sim$ σε ένα σύνολο X είναι σχέση ισοδυναμίας αν και μόνο αν ισχύουν τα εξής: (α) η $\sim$ είναι συμμετρική και μεταβατική, και, (β) για κάθε $x \in X$ υπάρχει $y \in X$ ώστε $x \sim y$.

13. Στο $\mathbb{Z}$ θεωρούμε τις σχέσεις $\equiv_4$ και $\equiv_6$. Ποιά είναι η σχέση $\equiv_4 \cap \equiv_6$;

14. Πόσες διαφορετικές σχέσεις ισοδυναμίας μπορούμε να ορίσουμε στο σύνολο $A = \{1,2,3,4\}$;

15. Έστω $\boldsymbol{\rho_1}$ και $\boldsymbol{\rho_2}$ δύο σχέσεις ισοδυναμίας στο ίδιο σύνολο X. Υποθέτουμε ότι $\boldsymbol{\rho_1} \subseteq \boldsymbol{\rho_2}$. Αν Δ_1 και Δ_2 είναι οι διαμερίσεις του X που αντιστοιχούν στις $\boldsymbol{\rho_1}, \boldsymbol{\rho_2}$, υπάρχει κάποια σχέση μεταξύ των Δ_1 και Δ_2;

16. Δείξτε ότι κάθε ασθενής διάταξη είναι ανακλαστική σχέση.

17. Έστω $\boldsymbol{\rho}$ μια ασθενής διάταξη στο σύνολο X. Δείξτε ότι η αντίστροφη σχέση $\boldsymbol{\rho}^{-1}$ είναι επίσης ασθενής διάταξη.

18. Στο σύνολο $A = \{\{0\},\{0,1\},\{0,1,2\},\{0,1,2,3\}\}$ ορίζουμε σχέση $\boldsymbol{\rho}$ ως εξής: $x\boldsymbol{\rho}y$ αν $x \subseteq y$. Εξετάστε αν η $\boldsymbol{\rho}$ είναι ασθενής διάταξη.

19. Ορίζουμε μια σχέση $\boldsymbol{\rho}$ στο $\mathbb{N}$ ως εξής:

$$(a,b) \in \rho \text{ αν } a|b \text{ (ο } a \text{ είναι διαιρέτης του } b).$$

Είναι η $\boldsymbol{\rho}$ σχέση διάταξης; Αν ναι, είναι ασθενής διάταξη; Είναι γνήσια διάταξη;

20. Ορίζουμε μια σχέση $\boldsymbol{\rho}$ στο $X = \{1, 2, 6, 30, 210\}$ ως εξής:

$$(a, b) \in \boldsymbol{\rho} \text{ αν } a|b \text{ (ο } a \text{ είναι διαιρέτης του } b).$$

Είναι η $\boldsymbol{\rho}$ σχέση διάταξης; Αν ναι, είναι ασθενής διάταξη; Είναι γνήσια διάταξη;

21. Θεωρούμε τα σύνολα $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b\}$ και $C = A \times B$.

(α) Γράψτε όλα τα στοιχεία του C.

(β) Σχεδιάστε το καρτεσιανό γινόμενο $A \times C$.

(γ) Ορίζουμε μια σχέση $\boldsymbol{\rho} \subseteq A \times C$ (μεταξύ των στοιχείων των συνόλων A και C) ως εξής:

$$x\boldsymbol{\rho}(u, v) \quad \text{αν} \quad x > u.$$

Εξετάστε αν η σχέση $\boldsymbol{\rho}$ ικανοποιεί τη μεταβατική και την αντισυμμετρική ιδιότητα, και αν ναι, εξετάστε τι είδους διάταξη είναι.

22. Στο $\mathbb{R}^2$ ορίζουμε σχέση $\boldsymbol{\rho}$ ως εξής: $(x_1, y_1)\boldsymbol{\rho}(x_2, y_2)$ αν είτε $y_1 < y_2$ ή $y_1 = y_2$ και $x_1 \leq x_2$. Εξετάστε αν η $\boldsymbol{\rho}$ είναι ασθενής διάταξη.

23. Έστω A ένα σύνολο με μια γνήσια σχέση διάταξης S και έστω B ένα σύνολο με μια γνήσια σχέση διάταξης T. Η *λεξικογραφική σχέση* L στο $A \times B$ ορίζεται ως εξής: $(a, b)\ L\ (c, d)$ αν: είτε $a\,S\,c$ ή $a = c$ και $b\,T\,d$. Εξετάστε αν η L είναι σχέση διάταξης. Γιατί λέγεται λεξικογραφική;