Φυλλάδιο για Προετοιμασία Φοιτητικών Διαγωνισμών
Κεφάλαιο: Βασική Γραμμική Άλγεβρα
1-2 Δεκεμβρίου 2012
Επιμέλεια: Ηλίας Ζαδίκ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΕΞΑΣΚΗΣΗ

1) Να δειχτει ότι κάθε πίνακας στο $M_n(\mathbb{R})$ γράφεται ως άθροισμα ενός συμμετρικού πίνακα και ενός αντισυμμετρικού .

2) Καλούμε έναν πίνακα στοχαστικό αν το άθροισμα κάθε γραμμής του είναι ίσο με 1. Να δειχτεί ότι αν A, B στοχαστικοί τότε και ο AB είναι στοχαστικός.

3)Έστω $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ που δεν μετατίθονται για τους οποίους υπάρχουν $p, q, r \geq 0$, τέτοιοι ώστε να ισχύει $pAB + qBA = I$ και $A^2 = rB^2$.
Να δειχτεί ότι $p = q$.

4)Έστω $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{F})$, $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$.
α)Αν $AB = BA$, για κάθε B διαγώνιο, να δειχτεί ότι ο A πρέπει να είναι διαγώνιος.
β)Αν $AB = BA$ για κάθε $B \in M_n(\mathbb{F})$,να δειχτεί ότι $A = mI$, όπου $m \in \mathbb{F}$.
γ)Αν $AB = BA$ για κάθε B με μηδενικά στην κύρια διαγώνιο, να δειχτει ότι $A = mI$, όπου $m \in \mathbb{F}$.

5) Αν ο A είναι αντιστρέψιμος με θετικά στοιχεια να δειχτει ότι ο A^{-1} έχει το πολύ $n^2 - 2n$ μηδενικά.

6)Να βρεθούν όλοι οι πίνακες $A \in M_n(\mathbb{R})$ με μη αρνητικά στοιχεια τέτοιοί ώστε ο A^{-1} να έχει επίσης μη αρνητικά στοιχεια.

7)Να δειχτεί ότι δεν υπάρχουν $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ τέτοιοι ώστε $AB - BA = I$. Να δειχτεί όμως ότι υπάρχουν $A, B \in M_2(\mathbb{Z}_2)$ τέτοιοι ώστε $AB - BA = I$.

8)Αν $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ τέτοιοι ώστε $tr(AA^t + BB^t) = tr(AB + A^tB^t)$ να δειχτεί οτι $A = B^t$.

9)Έστω $A \in M_n(\mathbb{Z})$, στον οποίο κάθε γραμμή του αθροίζει στο n. Να δειχτει ότι $n|det(A)$.

10)Έστω $A \in M_n(\mathbb{R})$ του οποίου κάθε στοιχείο είναι ίσο είτε με $+1$ είτε με -1.
α) Να δειχτεί ότι $2^{n-1}|det(A)$.
β) Για δοσμένο n, να βρεθεί η ελάχιστη θετική τιμή που θα μπορούσε να λάβει η ορίζουσα του A.

11)Να βρείτε τους φυσικούς n για τους οποίους υπάρχει $A \in M_n(\mathbb{R})$ τέτοιος ώστε $A^2 = -I$.

12)Να δειχτεί ότι δεν υπάρχουν $B, C \in M_n(\mathbb{R})$ τέτοιοι ώστε $B^2 + C^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ και $BC = CB$.

13) Έστω $p(x)$ πολυώνυμο άρτιου βαθμού που ανήκει στο $\mathbb{R}[x]$. Να δειχτεί ότι η συνάρτηση $f : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$, ορισμένη με $f(X) = p(X)$, δεν είναι επί.

-