Προβλήματα για το διαγωνισμό επιλογής
για τη Μαθηματική Ολυμπιάδα πρωτοετών και δευτεροετών φοιτητών
28 Ιανουαρίου 2023

Πρόβλημα 1. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα
$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{(e^x+1)(x^2+1)}\,.$$

Πρόβλημα 2. Βρείτε όλα τα ζεύγη πινάκων $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ για τα οποία $\operatorname{tr}(AA^T + BB^T) = \operatorname{tr}(A^T B + B^T A)$, όπου με $\operatorname{tr}(X)$ συμβολίζουμε το ίχνος ενός τετραγωνικού πίνακα X.

Πρόβλημα 3. Βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για τις οποίες
$$n^2 \int_x^{x+\frac{1}{n}} f(t)\,dt \;=\; nf(x) + 1$$
για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και κάθε ακέραιο $n \geq 2$.

Πρόβλημα 4. Βρείτε όλους τους πίνακες $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ που έχουν την ιδιότητα $\operatorname{rank}(AX) = \operatorname{rank}(XA)$ για κάθε πίνακα $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$, όπου με $\operatorname{rank}(Y)$ συμβολίζουμε την τάξη ενός πίνακα Y.

Πρόβλημα 5. Δίνεται ακολουθία $(x_n)_{n\geq 1}$ μη αρνητικών πραγματικών αριθμών, με
$$x_{n+1} \;=\; x_n + \frac{x_n^2}{n^2}$$
για $n \geq 1$. Για ποιες τιμές του $x_1 \geq 0$ συγκλίνει η (x_n);

Η διάρκεια της εξέτασης είναι 3 ώρες. **ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!**

Λύσεις

Πρόβλημα 1: Έστω I το δοσμένο ολοκλήρωμα. Με την αλλαγή μεταβλητής $y = -x$ βρίσκουμε ότι

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{(e^{-x}+1)(x^2+1)}$$

και συμπεραίνουμε ότι

$$I = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \left(\frac{1}{e^x+1} + \frac{1}{e^{-x}+1}\right)\frac{dx}{x^2+1} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2+1} = \frac{1}{2}\arctan(x)\,\Big|_{-1}^{1} = \frac{\pi}{4}.$$

Πρόβλημα 2: Αυτό συμβαίνει μόνο αν $A = B$. Πράγματι, χρησιμοποιώντας τη γραμμικότητα του ίχνους και την ιδιότητα $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$ για $n \times n$ πινάκες A και B, η δοσμένη ισότητα γράφεται ισοδύναμα ως $\mathrm{tr}((A-B)(A-B)^T) = 0$. Θέτοντας $X = A - B$ και παρατηρώντας ότι $\mathrm{tr}(XX^T) = \sum_{i,j=1}^{n} x_{ij}^2$ αν $X = (x_{ij})$ συμπεραίνουμε ότι $X = O$, δηλαδή ότι $A = B$.

Πρόβλημα 3: Από τη δοσμένη ισότητα προκύπτει ότι η f είναι παραγωγίσιμη και ότι

$$f'(x) = n\left(f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)\right)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Από αυτή την ισότητα προκύπτει ότι η f' είναι παραγωγίσιμη, με συνεχή παράγωγο f''. Επίσης, εφαρμόζοντας το θεώρημα της μέσης τιμής στο διάστημα $[x, x+1/n]$ συμπεραίνουμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και κάθε $n \geq 2$ υπάρχει $\xi_n = \xi_n(x)$ τέτοιο ώστε $x < \xi_n < x + 1/n$ και $f'(x) = f'(\xi_n)$. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα του Rolle στο διάστημα $[x, \xi_n]$ βρίσκουμε $\zeta_n = \zeta_n(x)$ τέτοιο ώστε $x < \zeta_n < \xi_n$ και $f''(\zeta_n) = 0$ και, θέτοντας $n \to \infty$, συμπεραίνουμε ότι $f''(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα, η f είναι της μορφής $f(x) = ax + b$ για κάποια $a, b \in \mathbb{R}$. Από την ταυτότητα του προβλήματος προκύπτει ότι $a = 2$ και συνεπώς $f(x) = 2x + b$, με $b \in \mathbb{R}$.

Πρόβλημα 4: Την ιδιότητα αυτή έχουν ο μηδενικός $n \times n$ πίνακας και κάθε αντιστρέψιμος πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, αφού τότε $\mathrm{rank}(AX) = \mathrm{rank}(X)$ και $\mathrm{rank}(XA) = \mathrm{rank}(X)$ για κάθε πίνακα $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Θα δείξουμε ότι μόνο αυτοί οι πίνακες έχουν την επιθυμητή ιδιότητα. Πράγματι, έστω ότι ο $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ δεν είναι αντιστρέψιμος και έχει την ιδιότητα. Τότε, υπάρχει μη μηδενικό διάνυσμα

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \ker(A).$$

Για τυχαία $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ θεωρούμε τον $n \times n$ πίνακα X με στήλες $\lambda_1 x, \lambda_2 x, \ldots, \lambda_n x \in \ker(A)$. Τότε, $AX = O$ και συνεπώς $\mathrm{rank}(AX) = 0$. Από την υπόθεσή μας για τον A προκύπτει ότι $\mathrm{rank}(XA) = 0$, οπότε $XA = O$ ή, ισοδύναμα,

$$A^t X^t = A^t \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 x_1 & \lambda_1 x_2 & \cdots & \lambda_1 x_n \\ \lambda_2 x_1 & \lambda_2 x_2 & \cdots & \lambda_2 x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_n x_1 & \lambda_n x_2 & \cdots & \lambda_n x_n \end{pmatrix} = O.$$

Αφού $x_i \neq 0$ για κάποιο i, έπεται ότι

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \in \ker(A^t)$$

για όλα τα $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. Συμπεραίνουμε ότι $A^t = O$, δηλαδή ότι $A = O$.

Πρόβλημα 5: Θα δείξουμε ότι η (x_n) συγκλίνει αν και μόνο αν $0 \leq x_1 < 1$. Πράγματι, αν $x_1 \geq 1$, τότε με επαγωγή στο n βρίσκουμε ότι $x_n \geq n$ για κάθε θετικό ακέραιο n και συμπεραίνουμε ότι η (x_n) αποκλίνει. Έστω ότι $0 < x_1 < 1$. Δείχνουμε πρώτα με επαγωγή στο n ότι $x_n < nx_1$ για κάθε $n \geq 2$ και συμπεραίνουμε ότι $x_k < k - 1$ για κάποιο $k \geq 2$. Αφού

$$\frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_{n+1}} = \frac{x_n^2/n^2}{x_n x_{n+1}} < \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)},$$

για $n > k$ έχουμε

$$\frac{1}{x_k} - \frac{1}{x_n} = \sum_{i=k}^{n-1} \left(\frac{1}{x_i} - \frac{1}{x_{i+1}} \right) < \sum_{i=k}^{n-1} \frac{1}{i(i-1)} = \sum_{i=k}^{n-1} \left(\frac{1}{i-1} - \frac{1}{i} \right) = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{n-1} < \frac{1}{k-1}.$$

Έπεται ότι

$$0 < x_n < \frac{1}{1/x_k - 1/(k-1)}$$

για κάθε $n \geq k$. Κατά συνέπεια, η (x_n) είναι φραγμένη. Αφού προφανώς είναι και (γνησίως) αύξουσα, έπεται ότι η (x_n) συγκλίνει.