ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικό και Καποδιστριακό
Πανεπιστήμιο Αθηνών

Προετοιμασία για IMC 2020

Προβλήματα

Παρακάτω βρίσκονται τα προβλήματα που συζητήθηκαν στα πλαίσια της προετοιμασίας των φοιτητών του Ε.Κ.Π.Α. για τον διαγωνισμό IMC 2020.

ΟΜΑΔΑ Α

Γραμμική Άλγεβρα

1. Έστω ότι οι $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ικανοποιούν τη σχέση $AB-A-B = I_n$. Αν ο είναι αντισυμμετρικός, να δειχθεί ότι ο είναι ορθογώνιος.

2. Ένας πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ θα λέγεται *καλός* αν κάθε $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$ μπορεί να γραφεί με μοναδικό τρόπο στη μορφή $X = Y + Z$, όπου $AY = YA$ και $AZ = -ZA$. Να δειχθεί ότι ένας πίνακας A είναι *καλός* αν και μόνον αν $A^2 = \lambda I_n$ όπου $\lambda \in \mathbb{C}^*$.

3. Έστω A, B τετραγωνικοί πίνακες, και $C = AB - BA$. Αν ο μετατίθεται με τον C, να δειχθεί ότι ο C είναι μηδενοδύναμος.

4. Να εξεταστεί αν υπάρχουν δύο πίνακες $A, B \in \mathbb{Z}^{2019\times 2019}$ τέτοιοι ώστε:
(α) $\det(B) = 1$
(β) $AB = BA$
(γ) $A^4 + 4A^2B^2 + 16B^4 = 2019I$.

5. Να βρεθούν όλοι οι ρητοί αριθμοί a τέτοιοι ώστε ο πίνακας
$$A = \begin{pmatrix} a & -a & -1 & 0 \\ a & -a & 0 & -1 \\ 1 & 0 & a & -a \\ 0 & 1 & a & -a \end{pmatrix}$$
να είναι τετράγωνο ενός πίνακα με ρητές εγγραφές.

6. Για κάποιον πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ και κάποιο $k \in \mathbb{N}$, ο πίνακας $^{[k]}$ είναι ο πίνακας , του οποίου τις εγγραφές έχουμε υψώσει στη δύναμη k. Αν $A^k = A^{[k]}$, για κάθε $k = 1, 2, ..., n+1$, να δειχθεί ότι η σχέση αυτή ισχύει για κάθε $k \geq 1$.

7. Θεωρούμε n άτομα, καθένας από τους οποίους έχει (στην αρχή) από έναν (διαφορετικό) πρώτο αριθμό. Σε κάθε βήμα, ένα από τα n άτομα, επιλέγει κάποιο άλλο άτομο και πολλαπλασιάζει τον αριθμό που έχει με τον αριθμό του ατόμου που επέλεξε. Να εξεταστεί αν, μετά από πεπερασμένο αριθμό κινήσεων, είναι δυνατόν να έχουν δύο άτομα τον ίδιο αριθμό.

8. Δίνεται άδειος πίνακας 2020×2020. Δύο παίκτες A και B παίζουν το ακόλουθο παιχνίδι: ξεκινώντας από τον A και παίζοντας εναλλάξ, ο κάθε παίκτης βάζει από ένα μιγαδικό αριθμό σε κάποια κενή θέση του πίνακα. Το παιχνίδι τελειώνει όταν όλες οι θέσεις είναι συμπληρωμένες. Στόχος του B είναι ο πίνακας που θα προκύψει να έχει μηδενική ορίζουσα. Ο A κερδίζει αν το αποτρέψει. Ποιος παίκτης έχει στρατηγική νίκης?

9. Δίνεται σύνολο S με n στοιχεία και $A_1, A_2, ..., A_{n+1}$ υποσύνολά του. Να αποδειχθεί ότι υπάρχουν ξένα $I, J \subseteq \{1, 2, ..., n+1\}$ ώστε $\bigcup\limits_{i\in I} A_i = \bigcup\limits_{j\in J} A_j$.

10. Θεωρούμε ένα θετικό αριθμό x, και έναν πίνακα $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, ο οποίος ικανοποιεί τη σχέση $\det(A^2 + xI_2) = 0$. Να δειχθεί ότι $\det(A^2 + A + xI_2) = x$.

11. Θεωρούμε έναν περιττό πρώτο αριθμό p, και έναν πίνακα $A \in \mathbb{Q}^{p\times p}$. Υποθέτουμε ότι

$$\det(A^p + I_p) = 0 \text{ και } \det(A + I_p) \neq 0.$$

Να αποδειχθεί ότι το trA είναι ιδιοτιμή του πίνακα $A + I_p$.

12. Δίνεται ένας ορθογώνιος $n \times n$ πίνακας A με πραγματικές εγγραφές. Για κάποιο $u \in \mathbb{R}^n$ μοναδιαίο, θέτουμε $B = I - 2uu^T$. Να αποδειχθεί ότι, αν το 1 δεν είναι ιδιοτιμή του , είναι ιδιοτιμή του .

13. Θεωρούμε έναν ερμιτιανό πίνακα $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ο οποίος έχει τα διαγώνια στοιχεία ίσα με 1, και για κάθε $1 \leq i \leq n$ ισχύει $\sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}| \leq 2$. Να αποδειχθεί ότι κάθε ιδιοτιμή του A ανήκει στο διάστημα $[0, 2]$, καθώς και ότι $\det(A) \leq 1$.

14. Θεωρούμε $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία πινάκων η οποία ορίζεται αναδρομικά ως εξής:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ και για κάθε } n \geq 1, A_{n+1} = \begin{pmatrix} A_n & I_{2^n} \\ I_{2^n} & A_n \end{pmatrix}.$$

Να δειχθεί ότι κάθε πίνακας A_n έχει ακριβώς $n+1$ ιδιοτιμές $\lambda_0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_n$ που έχουν πολλαπλότητες $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \cdots, \binom{n}{n}$, αντίστοιχα.

15. Έστω $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ συμμετρικοί πίνακες. Αν ένας από τους A, B είναι μη αρνητικά ορισμένος, να αποδειχθεί ότι ο πίνακας AB έχει πραγματικές ιδιοτιμές.

Ανάλυση

1. Έστω ακολουθία $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ πραγματικών με $x_0 = 1$ και $x_{n+1} = \ln(e^{x_n} - x_n)$. Να βρεθεί το όριο της σειράς
$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n.$$

2. Έστω ακολουθία $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ πραγματικών με $x_0 = \frac{5}{2}$ και $x_{k+1} = x_k^2 - 2$. Να βρεθεί το άπειρο γινόμενο
$$\prod_{n=0}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{x_n}\right).$$

3. Έστω ακολουθία $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ θετικών πραγματικών με $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n}{2n-1} = 1$ να δειχθεί ότι
$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{k^2} \leq 2.$$

4. Να βρεθεί το
$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{(n^3+6n)^2}{n^6-64}.$$

5. Να βρεθεί το
$$\sum_{n=0}^{\infty} \arctan\left(\frac{1}{n^2+n+1}\right).$$

6. Να δειχθεί ότι
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}(n+1)} < 2$$

7. Έστω ακολουθία $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ πραγματικών με $x_0 = 0$ και $x_{n+1}^3 = x_n^2 - 8$. Να δειχθεί ότι:
$$\sum_{n=0}^{\infty} |x_{n+1} - x_n| < \infty$$

8. Έστω $C = \{4, 6, 7, 9, 10, ...\}$ το σύνολο των θετικών ακεραίων χωρίς τους πρώτους αριθμούς. Ορίζουμε ακολουθία a_n ως εξής, ο a_n να είναι ο μικρότερος ακέραιος k που είναι τέτοιος ώστε $n \mid k!$. Να εξεταστεί ως προς την σύγκλιση η σειρά:
$$\sum_{n \in C} \left(\frac{a_n}{n}\right)^n$$

9. Έστω $f : [0,1] \to [0,1]$ με: $\int_x^1 f(t)dt \leq \frac{1-x^2}{2}$. Να δειχθεί ότι:
$$\int_0^1 f(x)dx \leq \frac{1}{3}$$

10. Έστω $f : (-1,1) \to \mathbf{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη με $2f'(x) + xf''(x) \geq 1, \forall x \in (-1,1)$. Να δειχθεί ότι:

$$\int_{-1}^{1} xf(x)dx \geq \frac{1}{3}$$

11. Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $xf(y) + yf(x) \leq 1, \forall x, y \in [0,1]$. Να δειχθεί ότι:

$$\int_{0}^{1} f(x)dx \leq \frac{\pi}{4}$$

12. Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ με: $f(x) + f(y) \geq |x - y|$. Να βρεθεί η ελάχιστη δυνατή τιμή της παράστασης

$$\int_{0}^{1} f(x)dx$$

υπεράνω όλων αυτών των συναρτήσεων.

13. Έστω $f : [1,3] \to [-1,1]$ με $\int_1^3 f(x)dx = 0$. Να βρεθεί το βέλτιστο άνω φράγμα των ποσοτήτων

$$\int_{1}^{3} \frac{f(x)}{x}dx$$

για όλες αυτές τις συναρτήσεις. Επιπλέον, να εξεταστεί αν η τιμή αυτή του sup μπορεί να επιτευχθεί.

14. Έστω f συνεχής στο $[a,b]$ παραγωγίσιμη στο (a,b) με την f να έχει άπειρα σημεία μηδενισμού στο $[a,b]$ αλλά να μην υπάρχει $x \in (a,b)$ με $f(x) = f'(x) = 0$. Να δειχθεί πως $f(a) \cdot f(b) = 0$ και να δοθεί παράδειγμα τέτοιας f.

15. Έστω $f : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ με $f \in C^2(\mathbb{R})$ και $|f'(x) - f'(y)| \leq L|x - y|, \forall x, y \in \mathbb{R}, L > 0$. Να δειχθεί πως:

$$(f'(x))^2 < 2Lf(x), \forall x \in \mathbb{R}$$

16. Έστω ακολουθία $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ πραγματικών με $x_{m+n} \leq x_m + x_n, \forall n, m \in \mathbb{N}$. Να δειχθεί ότι η $\dfrac{x_n}{n}$ συγκλίνει και επιπλέον:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_n}{n} = \inf_{n\geq 1} \frac{x_n}{n}.$$

17. Έστω $\mathcal{F}$ το σύνολο όλων των $f : (0,+\infty) \to (0,+\infty)$ με $f(3x) \geq f(f(2x)) + x$. Να βρεθεί η μέγιστη τιμή του a τέτοια ώστε $f(x) \geq ax, \forall f \in \mathcal{F}, x \in (0,+\infty)$.

18. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$, πεπερασμένο ή και άπειρο. Να δειχθεί ότι:

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{0}^{1} f(nx)dx = L$$

19. Να βρεθούν όλες οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με:

$$f'(x) = \frac{f(x+n) - f(x)}{n}$$

20. Έστω f συνεχής στο $[0,1]$ να δειχθεί ότι:

$$\int_{0}^{1}\int_{0}^{1} |f(x) + f(y)|dxdy \geq \int_{0}^{1} |f(x)|dx$$

Συνδυαστική

1. Δίνεται άδειος κύβος διαστάσεων $2020 \times 2020 \times 2020$, και το αντίστοιχο πλέγμα 2020×2020 μοναδιαίων τετραγώνων, που ζωγραφίζεται σε κάθε μία από τις έξι έδρες του. "Δοκός" ονομάζεται κάθε $1 \times 1 \times 2020$ ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο. Κάποιες δοκοί τοποθετούνται στο εσωτερικό του κύβου, ώστε οι όψεις τους να είναι παράλληλες προς τις όψεις του κύβου, ανά δύο να έχουν κενή εσωτερική τομή και κάθε μία από τις τέσσερις 1×2020 όψεις κάθε δοκού εφάπτεται είτε σε όψη του κύβου είτε στο εσωτερικό της όψης κάποιας άλλης δοκού. Να αποδειχθεί ότι ο ελάχιστος αριθμός δοκών που μπορούν να τοποθετηθούν ώστε να ικανοποιούνται αυτές οι συνθήκες είναι 3030.

2. Σε ένα τραπέζι υπάρχουν $k \geq 2$ στοίβες, που έχουν $n_1, n_2, \ldots, n_k$ μολύβια, αντίστοιχα. Μία κίνηση αποτελείται από την επιλογή δύο στοιβών με a και b μολύβια αντίστοιχα, όπου $a \geq b$, και τη μεταφορά b μολυβιών από την πρώτη στη δεύτερη στοίβα. Να βρεθεί ικανή και αναγκαία συνθήκη για τα $n_1, n_2, \ldots, n_k$, ώστε μετά από κάποια ακολουθία κινήσεων, να μπορούν να μεταφερθούν όλα τα μολύβια σε μία στοίβα.

3. Θεωρούμε όλες τις 26^{26} λέξεις μήκους 26 στο λατινικό αλφάβητο. Ορίζουμε το βάρος της λέξης σαν $1/(k+1)$, όπου k είναι ο αριθμός των γραμμάτων που δε χρησιμοποιούνται σε αυτή τη λέξη. Να αποδειχθεί ότι το άθροισμα όλων των βαρών όλων των λέξεων είναι 27^{25}.

4. Έστω S πεπερασμένο σύνολο ανά τριών μη συνευθειακών σημείων στο επίπεδο. Για κάθε κυρτό πολύγωνο P με κορυφές στο S, έστω $a(P)$ ο αριθμός των κορυφών του P, και $b(P)$ ο αριθμός των σημείων του S που είναι εκτός του P. Ένα ευθύγραμμο τμήμα, ένα σημείο και το κενό σύνολο θεωρούνται κυρτά πολύγωνα με 2, 1, και 0 κορυφές αντίστοιχα. Να δειχθεί ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ισχύει $\sum_P x^{a(P)}(1-x)^{b(P)} = 1$, όπου το άθροισμα λαμβάνεται πάνω από όλα τα κυρτά πολύγωνα P με κορυφές στο S

5. Για κάποιον $n > 2$, θεωρούμε ένα σχολείο με $2n$ μαθητές. Κάθε βδομάδα, n μαθητές πηγαίνουν ένα ταξίδι. Μετά από έναν αριθμό ταξιδιών, διαπιστώθηκε ότι κάθε δύο μαθητές ήταν μαζί σε τουλάχιστον ένα ταξίδι. Ποιος είναι ο ελάχιστος αριθμός ταξιδιών, ώστε αυτό να μπορεί να πραγματοποιηθεί?

6. Μία εξωγήινη φυλή, έχει τρία φύλα, αρσενικό, θηλυκό και ουδέτερο. Μία παντρεμένη τριάδα είναι ένα σύνολο τριών ατόμων διαφορετικών φύλων που όλοι αρέσουν σε όλους. Κάθε άτομο επιτρέπεται να συμμετέχει σε το πολύ μία παντρεμένη τριάδα. Τα αισθήματα είναι πάντοτε αμοιβαία. Η φυλή στέλνει σε έναν πλανήτη που θέλει να αποικήσει, n αρσενικά, n θηλυκά και n ουδέτερα. Σε κάθε μέλος της αποστολής αρέσουν τουλάχιστον k άτομα από καθένα φύλο. Το πρόβλημα είναι η δημιουργία παντρεμένων τριάδων ώστε να συνεχίσει να ζει η φυλή. Να αποδειχθεί ότι:
   - Αν ο n είναι άρτιος και $k = \dfrac{n}{2}$, μπορεί να μην υπάρχει καμία παντρεμένη τριάδα.
   - Αν $k \geq \dfrac{3n}{4}$, μπορούμε οπωσδήποτε να βάλουμε τον καθένα σε μια παντρεμένη τριάδα.

7. Θεωρούμε ορθογώνιο $\mathcal{R}$ με μήκη πλευρών περιττούς ακεραίους. Χωρίζουμε το $\mathcal{R}$ σε ορθογώνια, που έχουν πλευρές παράλληλες προς αυτές του $\mathcal{R}$ και έχουν μήκη θετικούς ακεραίους. Να αποδειχθεί ότι κάποιο από αυτά τα ορθογώνια έχει μήκη πλευρών περιττούς αριθμούς.

8. Ο Σωτήρης και ο Νίκος παίζουν το ακόλουθο παιχνίδι στο σύνολο $A = [20]\times[20]$. Τα σημεία του στην αρχή είναι κενά. Ο Σωτήρης, σε κάθε κίνησή του, τοποθετεί μια κόκκινη πέτρα σε κάποιο κενό σημείο του , το οποίο δεν απέχει απόσταση $\sqrt{5}$ από κάποια άλλη κόκκινη πέτρα. Ο Νίκος, σε κάθε κίνησή του, τοποθετεί μια μπλε πέτρα σε ένα κενό σημείο του . Το παιχνίδι τελειώνει όταν κάποιος παίκτης δεν μπορεί να τοποθετήσει πέτρα. Να βρεθεί η μέγιστη τιμή του τέτοια ώστε ο Σωτήρης να είναι σίγουρος ότι θα τοποθετήσει τουλάχιστον πέτρες, ανεξάρτητα από το πώς παίζει ο Νίκος.

9. Έστω $S = \{1, 2, ..., 20\}$ και $m \in \mathbb{N}$. Ένα σύνολο F συναρτήσεων από το S στον εαυτό του λέμε ότι είναι καλό, αν για κάθε $i, j \in S$, υπάρχουν $f_1, ..., f_k \in F$ τέτοιες ώστε $f_k(f_{k-1}(...(f_1(i)))) = f_k(f_{k-1}(...(f_1(j))))$, με $k \leq m$. Να αποδειχθεί ότι:
   - Κάθε σύνολο F είναι καλό, αν $m = 190$.
   - Υπάρχει μη καλό σύνολο F, αν $m < 190$.

10. Θεωρούμε ένα κολιέ με $3k$ χάντρες που είναι κόκκινες, μπλε και άσπρες, όπου το πλήθος των χαντρών κάθε χρώματος είναι k. Υποθέτουμε ότι το πλήθος των ζευγών διαδοχικών χαντρών που είναι ίδιου χρώματος είναι άρτιος. Να αποδειχθεί ότι μπορούμε να κόψουμε το κολιέ σε δύο μικρότερα, ώστε καθένα να περιέχει ίσο πλήθος κόκκινων, μπλε και άσπρων χαντρών.

11. 1994 κορίτσια κάθονται γύρω γύρω από ένα κυκλικό τραπέζι. Στην αρχή, ένα κορίτσι κρατάει n νομίσματα, όπου $n \in \mathbb{N}$. Σε κάθε γύρο, κάθε κορίτσι που έχει τουλάχιστον ένα νόμισμα, δίνει από ένα σε κάθε διπλανή της. Να αποδειχθεί ότι:
    - Αν $n < 1994$, το παιχνίδι τελειώνει κάποια στιγμή.
    - Αν $n = 1994$, το παιχνίδι δεν θα τελειώσει ποτέ.

12. Θεωρούμε 60 σημεία στο επίπεδο, ανά τρία μη συνευθειακά. Να αποδειχθεί ότι μπορούμε να χωρίσουμε αυτά τα σημεία σε 20 ομάδες των τριών σημείων η κάθε ομάδα, ώστε τα τρίγωνα που σχηματίζονται από τις ομάδες να έχουν μη κενή τομή.

13. Έστω p πρώτος. Να αποδειχθεί ότι κάθε πλήρες γράφημα με $1000p$ κορυφές με ακέραια βάρη περιέχει κύκλο του οποίου το άθροισμα των βαρών των κορυφών είναι πολλαπλάσιο του p.

ΟΜΑΔΑ Β

Γραμμική Άλγεβρα

1. Δίνεται τετραγωνικός πίνακας A με $3A^3 = A^2 + A + I$. Να δειχθεί ότι η ακολουθία πινάκων $(A^k)_{k=1}^{\infty}$ συγκλίνει σε ταυτοδύναμο πίνακα.

2. Έστω A, B μιγαδικοί τετραγωνικοί πίνακες, ίδιας διάστασης. Να αποδειχθεί ότι οι AB και BA έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο.

3. Δίνεται τετραγωνικός πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ με ιδιοτιμές που έχουν μέτρο μικρότερο ή ίσο του 1. Να δειχθεί ότι
$$\|A^n\| \le \frac{n}{ln2}\|A\|^{n-1}.$$

4. Δίνεται πίνακας $\in \mathbb{C}^{m\times m}$, του οποίου όλες οι ιδιοτιμές είναι ίσες με 1. Αν το σύνολο
$$\{A^n | n \in \mathbb{N}\}$$
είναι φραγμένο, να δειχθεί ότι $A = I_m$.

5. Δίνεται συμμετρικός πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Να αποδειχθεί ότι:
(α) Κάθε διαγώνιο στοιχείο του είναι μικρότερο ή ίσο από τη μέγιστη ιδιοτιμή του .
(β) Αν υπάρχει i για το οποίο το a_{ii} ισούται με τη μέγιστη ιδιοτιμή του , να δειχθεί ότι $a_{ij} = 0, \forall j \neq i$.

6. Για έναν τετραγωνικό πίνακα θέτουμε
$$\sin A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} A^{2n+1}.$$
Να εξεταστεί αν υπάρχει πίνακας διαστάεων 2×2 ώστε $\sin B = \begin{pmatrix} 1 & 2020 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

7. Για κάθε $x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{R}$, να δειχθεί ότι
$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{x_1 + x_2 + ... + x_k}{k}\right)^2 \le (3 + 2\sqrt{2})(x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2).$$

8. Έστω $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$. Να δειχθεί ότι $tr(A^n) \to 0 \Leftrightarrow A^n \to O_m$.

9. Έστω $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$, ώστε ο A να είναι μη αρνητικά ορισμένος και $A^kB + BA^k =$ για κάποιο $k \in \mathbb{N}$. Να δειχθεί ότι $AB = BA$.

10. Έστω , $\in \mathbb{C}^{n\times n}$ μη αρνητικά ορισμένοι πίνακες. Να αποδειχθεί ότι ο είναι μη αρνητικά ορισμένος $\Leftrightarrow AB = BA$.

11. Έστω n ένας θετικός ακέραιος και $A, B, M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ πίνακες ώστε $AM = MB$, και οι A, B έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο. Να δειχθεί ότι για κάθε $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ισχύει ότι $\det(A - MX) = \det(B - XM)$.

Ανάλυση

1. Έστω $f_1, f_2, ... : [0,1] \to \mathbb{R}$ ακολουθία παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $f_1 = 1$ και αναδρομικά:
$$f'_{n+1} = f_n f_{n+1}, f_{n+1}(0) = 1$$
Να δειχθεί ότι η ακολουθία συναρτήσεων αυτή συγκλίνει και να βρεθεί η οριακή συνάρτηση.

2. Έστω $x_n, y_m \in \mathbb{C}$ $n, m \in \mathbb{N}$ να δειχθεί ότι:

$$\left|\sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{x_n y_m}{n+m+1}\right| \leq \pi \left(\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{m=0}^{\infty} |y_m|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

3. Έστω πολυώνυμο f μη μηδενικό με πραγματικούς συντελεστές. Ορίζουμε ακολουθία πολυωνύμων με $f_0 = f$ και $f_{n+1} = f_n + f_n'$ για κάθε $n \geq 0$. Να δειχθεί ότι υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\forall n \geq N$ οι ρίζες του f_n να είναι όλες πραγματικές.

4. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια $1-$περιοδική και συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση τέτοια ώστε $\int_0^1 f(x)dx = 0$. Να δειχθεί ότι

$$\int_0^1 |f(x)|^2 dx \leq \int_0^1 |f'(x)|^2 dx$$

5. Έστω πολυώνυμο P με ακέραιους συντελεστές τέτοιο ώστε $|P(z)| \leq 2$ για κάθε μιγαδικό αριθμό με $|z| = 1$. Πόσους το πολύ μη μηδενικούς συντελεστές μπορεί να έχει το P?

6. Έστω $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής και $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $f_0 = g$ και

$$f_{n+1} = \frac{1}{x} \int_0^x f_n(t)dt$$

Να δειχθεί ότι η ακολουθία συναρτήσεων συγκλίνει κατά σημείο και να βρεθεί το όριο.

7. Έστω $p(z) = a_0 + a_1 z + ... + a_n z^n$ μιγαδικό πολυώνυμο και $1 = c_0 \geq c_1 \geq ... \geq c_n \geq 0$ μια κυρτή ακολουθία πραγματικών αριθμών ($2c_k \leq c_{k-1} + c_{k+1}$) και έστω το πολυώνυμο:

$$q(z) = c_0 a_0 + c_1 a_1 z + ... + c_n a_n z^n$$

Να δειχθεί ότι $\max\limits_{|z|\leq 1} q(z) \leq \max\limits_{|z|\leq 1} p(z)$.

8. Έστω n θετικός ακέραιος και $p(x)$ πολυώνυμο βαθμού n με ακέραιους συντελεστές, να δειχθεί ότι: $\max\limits_{0\leq x\leq 1} p(x) > \frac{1}{e^n}$

9. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και πραγματικοί αριθμοί $a < b$ με $f(x) = 0$ για κάθε $x \in (a,b)$. Αν για κάθε $y \in \mathbb{R}$ και κάθε πρώτο p έχουμε:

$$\sum_{k=0}^{p-1} f\left(y + \frac{k}{p}\right) = 0.$$

Να δειχθεί ότι $f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

10. Να αποδείξετε ότι υπάρχει σταθερά $C > 0$ τέτοια ώστε για κάθε πολυώνυμο βαθμού το πολύ 2020, να ισχύει:

$$|p(0)| \leq C \cdot \int_{-1}^1 |p(x)| dx$$

11. Έστω $\Omega = (1, +\infty) \times (1, +\infty)$ και $f \in C^2(\Omega)$ τέτοια ώστε:
    - $x f_x + y f_y = xyln(xy)$
    - $x^2 f_{xx} + y^2 f_{yy} = xy$.

Να βρεθεί για κάθε $s > 1$ η τιμή της παράστασης

$$f(s+1, s+1) - f(s+1, s) - f(s, s+1) + f(s, s).$$

12. Έστω $a_1, a_2, ..., a_n$ πραγματικοί αριθμοί με $|a_i| \geq 1, \forall i \in [n]$. Θεωρούμε του 2^n γραμμικούς συνδιασμούς $\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i a_i$, όπου $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$. Να δειχθεί πως το πλήθος των παραπάνω γραμμικών συνδιασμών που περιέχονται σε κάθε διάστημα μήκους 2 είναι το πολύ $c \cdot \frac{2^n}{\sqrt{n}} \cdot \ln(n)$ για κάποια σταθερά $c > 0$.

13. Έστω $a_1, a_2, ..., a_n > 0$ και $x_1, x_2, .., x_n$ πραγματικοί με
$$\sum_{k=0}^{n} a_k x_k = 0.$$
Να δειχθεί ότι $\sum_{i,j=1}^{n} x_i x_j |a_i - a_j| \leq 0$.

Συνδυαστική

1. Θεωρούμε ένα σύνολο S από n μεταβλητές. Μία απεικόνιση $\times : S \times S \to S$ καλείται απλή, αν $(x \times y) \times z = x \times (y \times z)$ για όλα τα $x, y, z \in S$ και $x \times y \in \{x, y\}$ για κάθε $x, y \in S$. Δεδομένης μιας τέτοιας πράξης, κάθε λέξη με στοιχεία από το S μπορεί να συμπτιχθεί σε ένα στοιχείο του S, με $xyz \to x \times (y \times z)$. Μία λέξη από στοιχεία του S καλείται πλήρης αν περιέχει κάθε στοιχείο του S τουλάχιστον μία φορά, και δύο λέξεις είναι ισοδύναμες αν δίνουν την ίδια τιμή, ανεξαρτήτως της $\times$ που επιλέγουμε. Για παράδειγμα, οι xxx, xx, και x είναι ισοδύναμες, αλλά είναι πλήρεις μόνο αν $n = 1$. Έστω, τέλος, T ένα σύνολο λέξεων τέτοιο, ώστε κάθε πλήρης λέξη είναι ισοδύναμη με ακριβώς ένα στοιχείο του . Να βρεθεί ο $|T|$.

2. Θεωρούμε κυκλικά κολιέ με 2013 χάντρες, καθεμία από τις οποίες βάφεται με πράσινο ή άσπρο. Ένα τέτοιο κολιέ καλείται "καλό" αν σε οποιεσδήποτε 21 συνεχόμενες χάντρες υπάρχει τουλάχιστον μια πράσινη. Να αποδειχθεί ότι το πλήθος των διαφορετικά χρωματισμένων καλών κολιέ είναι περιττό.

3. Ένας τρελός φυσικός ανακάλυψε στο εργαστήριό του ένα καινούριο σωματίδιο, το οποίο ονόμασε imon, μετά που εμφανίστηκαν πολλά στο εργαστήριό του. Κάποια από τα σωματίδια αυτά δύνανται να συνδεθούν μεταξύ τους, και κάθε imon μπορεί να συμμετέχει σε πολλές τέτοιες συνδέσεις. Μετά από πειράματα, ο φυσικός βρήκε τρόπο να κάνει τις ακόλουθες διαδικασίες:

   - Αν κάποιο imon είναι συνδεδεμένο με περιττό αριθμό από imons, ο φυσικός μπορεί να το καταστρέψει.
   - Μπορεί να διπλασιάσει το πλήθος των imons στο εργαστήριο, δημιουργώντας για κάθε imon I ένα I', και τα I', J' θα συνδεθούν αν και μόνο αν τα I, J συνδέονται. Επιπλέον, με αυτή τη διαδικασία συνδέονται το I με το I', για κάθε imon I.

   Να αποδειχθεί ότι ο φυσικός μπορεί να αποσυνδέσει όλα τα imons μεταξύ τους.

4. Ένα πεπερασμένο σύνολο S στο καρτεσιανό επίπεδο λέγεται τέλειο, αν $|S| \geq 2$ και υπάρχει πολυώνυμο P ώστε $degP \leq |S| - 2$ και $(x,y) \in S \Rightarrow y = P(x)$. Να αποδειχθεί ότι ένα όχι τέλειο σύνολο n αριθμών περιέχει το πολύ $2^{n-1} - n$ τέλεια υποσύνολα.

5. Θεωρούμε έναν πίνακα διαστάσεων $n \times n$, και γράφουμε από έναν ακέραιο σε κάθε κελί του. Σε κάθε κίνηση, επιλέγουμε ένα κελί του πίνακα και προσθέτουμε έναν από τους αριθμούς $1, 2, ..., 2n - 1$ σε κάθε κελί που είναι στην ίδια γραμμή ή στήλη με το επιλεγμένο κελί. Να βρεθεί συναρτήσει του n ο μέγιστος N τέτοιος ώστε για κάθε αρχική επιλογή ακεραίων, μπορούμε να κάνουμε πεπερασμένο αριθμό κινήσεων και να εμφανιστούν τουλάχιστον N άρτιοι αριθμοί στον πίνακα.

6. Έστω n θετικός ακέραιος. Μια ακολουθία με n όρους λέγεται πλήρης, αν για κάθε k που εμφανίζεται στην ακολουθία, εμφανίζεται και το $k - 1$, και μάλιστα η πρώτη εμφάνιση του $k - 1$ είναι πριν την τελευταία εμφάνιση του k. Να βρεθεί, συναρτήσει του n, ο αριθμός των πλήρων ακολουθιών με μήκος n.

7. Η Σταχτοπούτα και η κακιά μητριά της παίζουν το ακόλουθο παιχνίδι: στην αρχή υπάρχουν 8 μπουκάλια με χωρητικότητα k λίτρα που είναι τοποθετημένα σε έναν κύκλο. Σε κάθε γύρο, η κακιά μητριά γεμίζει κάποια μπουκάλια, έχοντας στη διάθεσή της συνολικά ένα λίτρο, και η Σταχτοπούτα αδειάζει ένα μπουκάλι. Η κακιά μητριά κερδίζει αν κάποιο μπουκάλι ξεχειλίζει. Να βρεθεί η μέγιστη τιμή του k τέτοια, ώστε η κακιά μητριά να είναι βέβαιη ότι θα κερδίσει.

8. Οι n διαγωνιζόμενοι του IMC ονομάζονται $C_1, C_2, ..., C_n$. Μετά το τέλος του διαγωνισμού, σχηματίζουν μια ουρά μπροστά από ένα εστιατόριο σύμφωνα με τους επόμενους κανόνες. Το Jury επιλέγει την αρχική διάταξη στην ουρά. Κατόπιν, σε κάθε λεπτό, το Jury έχει το δικαίωμα να επιλέξει κάποιον $1 \leq i \leq n$, οπότε αν ο C_i έχει τουλάχιστον i διαγωνιζόμενους μπροστά του, πληρώνει στο Jury το ποσό του ενός ευρώ και μετακινείται ακριβώς i θέσεις μπροστά. Διαφορετικά, η διαδικασία λήγει αυτόματα και ανοίγει το εστιατόριο. Να αποδείξετε ότι όντως είναι πεπερασμένο το πλήθος των λεπτών που πέρασαν μέχρι να ανοίξει το εστιατόριο, και να βρεθεί το μέγιστο δυνατό κέρδος του Jury.

9. Ένας συνταξιούχος μεταφραστής, στην πρώτη κίνηση γράφει μια λέξη που αποτελείται από n διαφορετικά μεταξύ τους γράμματα. Σε κάθε κίνηση από εκεί και έπειτα, βρίσκει το μέγιστο i τέτοιο ώστε η λέξη που αποτελείται από τα πρώτα i γράμματα της τελευταίας λέξης, αντεστραμμένα, να μην έχει γραφτεί πριν, και γράφει αυτή τη λέξη. Να αποδειχθεί ότι ο μεταφραστής μπορεί να κάνει τουλάχιστον $n!$ κινήσεις.

10. Έστω n ένας θετικός ακέραιος. Δεδομένων n σημείων στο επίπεδο να αποδειχθεί ότι μπορούμε να σχεδιάσουμε γωνίες μέτρου $\frac{2\pi}{n}$ με κορυφές όλα τα σημεία αυτά (μία γωνία για κάθε σημείο), ώστε κάθε σημείο του επιπέδου να ανήκει σε κάποια τέτοια γωνία.

11. Μία 1000×1000 σκακιέρα καλύπτεται με ντόμινο 1×10 που μπορούν να περιστραφούν. Ο στόχος μας είναι να βρούμε ποια ακριβώς είναι η τοποθέτηση των ντόμινο αυτών. Για το σκοπό αυτό, για κάποιο θετικό ακέραιο N, επιλέγουμε N το πλήθος τετράγωνα, και μπορούμε να μάθουμε τη θέση των ντόμινο που τα καλύπτουν. Ποιο είναι το ελάχιστο N ώστε να μπορούμε να επιτύχουμε το στόχο μας?

12. Έστω n ακέραιος ≥ 3. Σε μία χώρα υπάρχουν n αεροδρόμια και n αεροπορικές εταιρείες που εκτελούν δρομολόγια (και προς τις δύο κατευθύνσεις). Για κάθε αεροπορική εταιρεία, υπάρχει περιττός ακέραιος $m \geq 3$, και m διαφορετικά αεροδρόμια $c_1, c_2, ..., c_m$ τέτοια ώστε οι πτήσεις της αεροπορικής αυτής να είναι ακριβώς μεταξύ των αεροδρομίων c_i και c_{i+1}, για $1 \leq i \leq m$ ($c_{m+1} = c_1$). Να αποδειχθεί ότι υπάρχει κλειστή διαδρομή που αποτελείται από περιττό αριθμό πτήσεων, στην οποία δεν υπάρχουν διαφορετικές πτήσεις που γίνονται από την ίδια εταιρεία.

13. Έστω S πεπερασμένο σύνολο σημείων στο επίπεδο, που ανά τρία είναι μη συνευθειακά. Έστω επίσης Ω η κυρτή τους θήκη, η οποία είναι ένα $2016-$γωνο με κορυφές $A_1, ..., A_{2016}$. Κάθε σημείο του S σημαδεύεται με έναν από τους $\pm 1, \pm 2$ έτσι, ώστε για κάθε $i = 1, 2, ..., 1008$, τα σημεία A_i και A_{i+1008} να έχουν αντίθετους αριθμούς. Ζωγραφίζουμε με κορυφές σημεία του S τρίγωνα, τα οποία ανά δύο έχουν κενή εσωτερική τομή και καλύπτουν όλο το Ω. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει τρίγωνο στο οποίο δύο από τις κορυφές έχουν αντίθετους αριθμούς.

14. Έστω n ένας θετικός ακέραιος, και $2^n + 1$ διαφορετικά σύνολα, καθένα από τα οποία περιέχει πεπερασμένα το πλήθος αντικείμενα. Φτιάχνουμε δύο κατηγορίες συνόλων, την κόκκινη και τη μπλε. Να αποδειχθεί ότι υπάρχουν τουλάχιστον 2^n διαφορετικά σύνολα που μπορούν να ληφθούν ως συμμετρική διαφορά ενός κόκκινου και ενός μπλε συνόλου.

Γεννήτριες Συναρτήσεις

1. Θεωρούμε την ακολουθία $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ για την οποία ισχύει $F_0 = 0, F_1 = 1$ και, επιπλέον, για κάθε $n \geq 1$ ισχύει $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$. Να βρεθεί ο γενικός τύπος της ακολουθίας.

2. Για κάθε θετικό ακέραιο n, συμβολίζουμε με a_n το πλήθος των τρόπων με τους οποίους μπορούμε να καλύψουμε μια $n \times 2$ σκακιέρα με ορθογώνια 1×2 ή 2×1 ή 2×2. Να βρεθεί γενικός τύπος για το a_n.

3. Για την ακολουθία θετικών αριθμών $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ισχύει ότι
$$a_n = \sum_{k=n-1}^{\infty} \frac{a_k}{k+2} \text{και} \sum_{n=0}^{\infty} a_n = e.$$
Να βρεθεί το $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$.

4. Να αποδειχθεί ότι για κάθε θετικό ακέραιο n ισχύει $\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.

5. Έστω n θετικός ακέραιος. Πόσοι $n-$ψήφιοι θετικοί ακέραιοι υπάρχουν, των οποίων όλα τα ψηφία ανήκουν στο σύνολο $\{2, 3, 7, 9\}$ και οι οποίοι διαιρούνται με το 3?

6. Να βρεθεί το πλήθος των *τριγωνισμών* ενός κυρτού πολυγώνου με $n+2$ κορυφές.

7. Ορίζουμε τους ακεραίους $a_{m,k}$ από την ισότητα $(1-x+x^2)^m = \sum_{k=0}^{2m} a_{m,k}x^k$. Για κάθε φυσικό αριθμό n θέτουμε $b_n = \sum_{k=0}^{\lfloor 2n/3 \rfloor} a_{n-k,k}$. Να αποδειχθεί ότι $b_n \in \{-1, 0, 1\}$ για κάθε φυσικό αριθμό n.

8. Για κάθε φυσικό αριθμό n θεωρούμε το άθροισμα

$$s_n = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k \binom{n-k}{k} = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n-2}{2} - \dots$$

Να αποδειχθεί ότι $s_n \in \{-1, 0, 1\}$ για κάθε φυσικό αριθμό n.

9. Έστω p πρώτος αριθμός. Να βρεθεί το πλήθος των υποσυνόλων T του συνόλου $\{1, 2, \dots, p\}$ που είναι τέτοια ώστε ο p να διαιρεί το άθροισμα των στοιχείων του T.

10. Έστω n θετικός ακέραιος με $n \geq 3$. Θεωρούμε n μαθητές οι οποίοι έχουν ανά δύο διαφορετικό ύψος. Με πόσους τρόπους μπορούμε να τους βάλουμε σε μία σειρά ώστε τα ύψη οποιωνδήποτε τριών (όχι απαραίτητα διαδοχικών) από αυτούς, από τα αριστερά προς τα δεξιά να μην έχουν την διάταξη "μεσαίος, ψηλός, κοντός"?

11. Ο Γιώργος έχει τα νομίσματα $N_1, N_2, \dots, N_k$, τα οποία δεν είναι αμερόληπτα. Πιο συγκεκριμένα, για κάθε $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, το νόμισμα N_i έχει πιθανότητα $1/(2i+1)$ να φέρει κορώνα. Αν ρίξουμε και τα k νομίσματα, ποια είναι η πιθανότητα να εμφανιστεί περιττός αριθμός από κορώνες;

12. Έστω $\alpha(n)$ το πλήθος των τρόπων να γράψουμε τον θετικό ακέραιο n ως άθροισμα με προσθετέους που να ανήκουν στο σύνολο $\{1, 2\}$ (λαμβάνοντας υπ' όψιν και τη σειρά τους). Έστω $\beta(n)$ το πλήθος των τρόπων να γράψουμε το n ως άθροισμα θετικών ακεραίων μεγαλύτερων του 1, και πάλι λαμβάνοντας υπ' όψιν τη σειρά. Να αποδειχθεί ότι για κάθε θετικό ακέραιο n ισχύει $\alpha(n) = \beta(n+2)$.

13. Έστω S το σύνολο των τριάδων (i, j, k) θετικών ακεραίων με $i + j + k = 17$. Να υπολογιστεί το άθροισμα

$$\sum_{(i,j,k) \in S} ijk.$$

14. Να βρεθεί το πλήθος των υποσυνόλων του συνόλου $\{1, 2, \dots, 2007\}$ τα οποία έχουν άθροισμα στοιχείων που διαιρείται με το 17.

15. Μια αύξουσα ακολουθία ακεραίων (όχι απαραίτητα άπειρη) λέγεται *εναλλάσσουσα* αν ο πρώτος όρος είναι περιττός, ο δεύτερος άρτιος, ο τρίτος περιττός, και ούτω καθεξής. Η κενή ακολουθία θεωρείται επίσης *εναλλάσσουσα*. Έστω A_n το πλήθος των *εναλλάσσουσων* ακολουθιών που αποτελούνται μόνο από στοιχεία του συνόλου $\{1, 2, \dots, n\}$. Να βρεθεί ο A_{20}.

16. Πόσα πολυώνυμα P με συντελεστές $\{0, 1, 2, 3\}$ ικανοποιούν τη σχέση $P(2) = n$, όπου n είναι ένας δοσμένος θετικός ακέραιος?

Πιθανότητες

1. Σε ένα πανεπιστήμιο υπάρχουν 1600 φοιτητές οι οποίοι έχουν σχηματίσει 16000 επιτροπές. Καθεμία από αυτές έχει 80 μέλη. Να αποδειχθεί ότι υπάρχουν δύο επιτροπές που έχουν τουλάχιστον 4 κοινά μέλη.

2. Θεωορούμε θετικό ακέραιο M και υποσύνολα $A_1, \ldots, A_k$ του συνόλου $\{1, \ldots, M\}$, τέτοια ώστε να μην υπάρχουν δείκτες i, j με $A_i \subseteq A_j$. Να αποδειχθεί ότι

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\binom{M}{|A_i|}} \leq 1.$$

3. Έστω n θετικός ακέραιος. Επιλέγουμε υποσύνολα $A_1, \ldots, A_n$ και $B_1, \ldots, B_n$ του $\mathbb{N}$, τέτοια ώστε:

   - για κάθε $i \in \{1, \ldots, n\}$ να ισχύει $A_i \cap B_i = \varnothing$,
   - για κάθε $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ με $i \neq j$ να ισχύει $(A_i \cap B_j) \cup (A_j \cap B_i) \neq \varnothing$. Να αποδειχθεί ότι για κάθε πραγματικό αριθμό $p \in [0, 1]$ ισχύει

$$\sum_{i=1}^{n} p^{|A_i|}(1-p)^{|B_i|} \leq 1.$$

4. Σε έναν $n \times n$ πίνακα εμφανίζονται οι αριθμοί $1, 2, \ldots, n$, από n φορές ο καθένας. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει μια γραμμή ή μια στήλη του πίνακα, η οποία περιέχει τουλάχιστον $\sqrt{n}$ διακεκριμένα στοιχεία.

5. Έστω n θετικός ακέραιος και A ένα σύνολο υπολοίπων $\bmod n^2$. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει σύνολο B που αποτελείται και αυτό από n υπόλοιπα $\bmod n^2$, και είναι τέτοιο ώστε τουλάχιστον τα μισά από τα υπόλοιπα $\bmod n^2$ να μπορούν να γραφτούν ως $a + b$, όπου $a \in A$ και $b \in B$.

6. Έστω n, k θετικοί ακέραιοι με $n \geq 2k$ και έστω $\mathcal{C}$ συλλογή από $k-$υποσύνολα του $\{1, \ldots, n\}$ τα οποία έχουν ανά δύο μη κενή τομή. Να αποδειχθεί ότι

$$|\mathcal{C}| \leq \binom{n-1}{k-1}.$$

7. Θεωρούμε θετικούς πραγματικούς αριθμούς a, b, c, τέτοιους ώστε για κάθε θετικό ακέραιο n να ισχύει $\lfloor an \rfloor + \lfloor bn \rfloor = \lfloor cn \rfloor$. Να αποδείξετε ότι τουλάχιστον ένας από τους a, b, c είναι ακέραιος.

8. Σε μια τάξη κάθε αγόρι είναι φίλος με τουλάχιστον ένα κορίτσι. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει ένα σύνολο S που περιέχει τουλάχιστον τους μισούς μαθητές, και είναι τέτοιο ώστε κάθε αγόρι στο S να έχει περιττό αριθμό από φίλες στο S.

9. Σε ένα τουρνουά συμμετείχαν 799 παίκτες και κάθε δύο παίκτες έπαιξαν μεταξύ τους ακριβώς μία φορά. Να αποδειχθεί ότι υπάρχουν δύο σύνολα παικτών A και B, με 7 παίκτες στο καθένα, τέτοια ώστε κάθε παίκτης του συνόλου A κέρδισε κάθε παίκτη του συνόλου B.

ΟΜΑΔΑ Γ

Γραμμική Άλγεβρα

1. Έστω $G \subseteq \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ πεπερασμένο, του οποίου τα στοιχεία αποτελούν ομάδα (με πράξη τον πολλαπλασιασμό πινάκων). Αν $S = \sum_{A \in G} A$ και $tr(S) = 0$, να δειχθεί ότι $S = O_n$.

2. Έστω $, P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$, με $det(P) \neq 0$ και $det(A) = 1$. Αν $B = P^{-1}AP$, να δειχθεί ότι υπάρχει θετικός ακέραιος k τέτοιος ώστε ο B^k να έχει επίσης ακέραιες εγγραφές.

3. Έστω $\mathcal{A}$ μια αυτοσυζυγής υπάλγεβρα του $_n(\mathbb{C})$ που περιέχει τον I_n. Να αποδειχθεί ότι $\mathcal{A} = \mathcal{A}''$.
   Σημείωση: Για κάθε $B \subseteq \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, με B' συμβολίζουμε το μεταθέτη του , δηλαδή $B' = \{A \in \mathbb{C}^{n\times n} | AX = XA, \forall X \in B\}$. Με B'' συμβολίζουμε το $(B')'$.

Ανάλυση

1. Δίνεται μια ακέραια συνάρτηση $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Υποθέτουμε ότι η ακολουθία των παραγώγων $f^{(n)}$ συγκλίνει κατά σημείο. Να αποδειχθεί ότι $f^{(n)}(z) \to ce^z$ για κάποια σταθερά $c \in \mathbb{C}$.

Συνδυαστική

1. Σε μία εταιρεία, κάποια άτομα είναι εχθροί μεταξύ τους. Μια ομάδα ατόμων καλείται "ακοινώνητη" αν ο αριθμός των μελών της ομάδας είναι περιττός μεγαλύτερος του 1 και μπορούμε να βάλουμε τα μέλη της σε κύκλο, ώστε κάθε δύο γειτονικά μέλη να είναι εχθροί. Δεδομένου ότι υπάρχουν το πολύ 2015 ακοινώνητες ομάδες, να αποδειχθεί ότι υπάρχει τρόπος να διαμερίσουμε την εταιρεία σε 11 κομμάτια ώστε να μην υπάρχουν δύο εχθροί στο ίδιο κομμάτι.

2. Για κάθε n, έστω a_n το πλήθος των μεταθέσεων $(x_1, x_2, ..., x_n)$ του $(1, 2, ..., n)$ τέτοιων, ώστε κάθε δύο κλάσματα $\frac{x_k}{k}$ να είναι διαφορετικά ($k = 1, 2, ..., n$). Να αποδειχθεί ότι για κάθε $n \geq 1$, ο a_n είναι περιττός.

3. Σε ένα νησί, υπάρχουν n κάστρα καθένα από τα οποία είναι στη χώρα ή στη χώρα . Υπάρχει ένας διοικητής ανά κάστρο, ο οποίος ανήκει στη χώρα που βρίσκεται το αρχικό του κάστρο. Υπάρχουν κάποιοι δρόμοι δύο κατευθύνσεων ανάμεσα σε κάποια κάστρα, και δύο κάστρα καλούνται "γειτονικά" αν τα ενώνει δρόμος. Να αποδειχθεί ότι οι ακόλουθες δύο προτάσεις είναι ισοδύναμες:

   - Αν κάποιοι διοικητές από τη χώρα μετακινηθούν για να επιτεθούν σε κάστρα της χώρας , κάποιοι διοικητές της χώρας μπορούν να μετακινηθούν σε γειτονικά κάστρα της χώρας ώστε σε κάθε κάστρο της χώρας , οι διοικητές της χώρας είναι τουλάχιστον όσοι οι διοικητές της χώρας .
   - Για κάθε σύνολο X κάστρων της χώρας , το πλήθος των κάστρων της χώρας που είναι στο X ή έχουν γείτονα στο X είναι τουλάχιστον όσο το πλήθος των κάστρων της χώρας που είναι γειτονικά με κάποιο κάστρο της X.

4. Έστω $S = \{1, 2, ..., 2000\}$ και T υποσύνολο του S με ακριβώς 401 στοιχεία. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει θετικός ακέραιος n τέτοιος ώστε να υπάρχουν τουλάχιστον 70 το πλήθος $x \in T$ με $x + n \in T$.

5. Έστω m, n θετικοί ακέραιοι με $n > m \geq 2$ και ένα σύνολο $S \subseteq \mathbb{N}$ με $|S| = n$. Να αποδειχθεί ότι το S έχει τουλάχιστον 2^{n-m+1} υποσύνολα τέτοια, ώστε το άθροισμα των στοιχείων τους να διαιρείται από m.

6. Σε ένα άπειρο τετραγωνικό πλέγμα, τοποθετούμε πεπερασμένα το πλήθος αυτοκίνητα, καθένα από τα οποία καταλαμβάνει ένα κελί και κοιτάζει προς μία από τις τέσσερις κατευθύνσεις. Δεν υπάρχουν δύο αυτοκίνητα στο ίδιο κελί. Δίνεται ότι κάθε κελί αμέσως μπροστά από κάθε αυτοκίνητο είναι κενό, και δεν υπάρχουν δύο αυτοκίνητα που να "βλέπουν" το ένα το άλλο. Σε κάθε κίνηση, επιλέγουμε ένα αυτοκίνητο και το μεταφέρει μπροστά, σε ένα άδειο τετράγωνο. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει άπειρη ακολουθία έγκυρων κινήσεων, χρησιμοποιώντας κάθε αμάξι άπειρες το πλήθος φορές.

7. Ο Δημήτρης γράφει K σε κάποια τετράγωνα ενός άπειρου τετραγωνικού πλέγματος, και δεν θέλει να βάλει τρία διαδοχικά σε κάποια στήλη, γραμμή ή διαγώνιο. Να βρεθούν όλοι οι $d > 0$ τέτοιοι, ώστε για κάθε θετικό ακέραιο n, ο Δημήτρης να μπορεί να σημαδέψει τουλάχιστον dn^2 κελιά σε κάθε $n \times n$ τετράγωνο.

8. Έστω n θετικός ακέραιος. Να βρεθεί ο μικρότερος θετικός ακέραιος k με την ακόλουθη ιδιότητα:
Μπορούμε να χρωματίσουμε k τετράγωνα σε ένα $2n \times 2n$ πίνακα ώστε να υπάρχει μοναδική διαμέρισή του σε 2×1 και 1×2 ντόμινο, ώστε κανένα ντόμινο να μην περιέχει δύο σημαδεμένα τετράγωνα.

9. Θεωρούμε δύο σταθερούς αριθμούς n και k. Ο Χρήστος και ο Ιάσονας παίζουν το ακόλουθο παιχνίδι: στην αρχή, ο Χρήστος επιλέγει δύο θετικούς ακεραίους x και N με $1 \leq x \leq N$. Από αυτούς, αποκρύπτει τον x αλλά λέει τον N στον Ιάσονα, λέγοντας την αλήθεια. Ο Ιάσονας προσπαθεί να πάρει πληροφορία για τον x, ρωτώντας το Χρήστο ερωτήσεις. Σε κάθε ερώτηση, διαλέγει ένα υποσύνολο S των φυσικών αριθμών, και ρωτάει αν ισχύει $x \in S$. Ο Χρήστος μπορεί να απαντήσει είτε αλήθεια είτε ψέματα, με μόνο περιορισμό σε οποιεσδήποτε $k + 1$ διαδοχικές ερωτήσεις να απαντάει αληθινά τουλάχιστον μία φορά. Ο Ιάσονας δεν έχει περιορισμό στον αριθμό των ερωτήσεων που κάνει. Μετά το τέλος των ερωτήσεων, πρέπει να ανακοινώσει ένα σύνολο που αποτελείται από n θετικούς ακεραίους, και κερδίζει αν $x \in K$, αλλιώς χάνει. Να αποδειχθεί ότι:
   - Αν $n \geq 2^k$ ο Ιάσονας μπορεί να εγγυηθεί ότι θα κερδίσει.
   - Υπάρχει θετικός ακέραιος m τέτοιος ώστε για κάθε $k \geq m$, να υπάρχει $n \geq (1.99)^k$ για τον οποίο δεν μπορεί να εξασφαλίσει ο Ιάσονας ότι θα κερδίσει.

10. Δίνεται ένα σύνολο n σημείων στον τρισδιάστατο ευκλείδειο χώρο, ανά τέσσερα μη συνεπίπεδα. Το διαμερίζουμε σε δύο υποσύνολα $\mathcal{A}$ και $\mathcal{B}$. Ένα $\mathcal{AB}$−δέντρο είναι ένα σύνολο $n - 1$ ευθυγράμμων τμημάτων με ένα άκρο στο $\mathcal{A}$ και ένα στο $\mathcal{B}$, και δεν σχηματίζεται κλειστό πολύπλευρο. Ένα $\mathcal{AB}$−δέντρο μετασχηματίζεται σε ένα άλλο, ως ακολούθως:
Επιλέγουμε τρία ευθύγραμμα τμήματα A_1B_1, A_2B_1, A_2B_2 ώστε $|A_1B_1| + |A_2B_2| > |A_1B_2| +$

$|A_2B_1|$ και αντικαθιστούμε το A_1B_1 με το A_1B_2. Δεδομένου ενός $\mathcal{AB}-$δέντρου, να αποδειχθεί ότι κάθε ακολουθία διαδοχικών μετασχηματισμών τελειώνει μετά από πεπερασμένο αριθμό κινήσεων.

11. Υπάρχουν n κύκλοι γραμμένοι πάνω σε ένα κομμάτι χαρτί, που ανά δύο τέμνονται σε δύο σημεία, και ανά τρεις δε συντρέχουν. Ο Άρης ο Σαλιγκάρης κινείται στους κύκλους με τον ακόλουθο τρόπο:
Στην αρχή, κινείται στον έναν κύκλο δεξιόστροφα, μέχρι να συναντήσει ένα σημείο τομής με άλλο κύκλο. Στη συνέχεια, αρχίζει να κινείται στον άλλο κύκλο, αλλάζοντας και τη φορά της κίνησής του. Αν ο Άρης περάσει από όλα τα σημεία των περιφερειών των κύκλων, να δειχθεί ότι ο n είναι περιττός.

12. Ο Παναγιώτης και ο Αλέξανδρος παίζουν το ακόλουθο παιχνίδι στην ευθεία των πραγματικών: ο Παναγιώτης έχει μια παλέττα με τέσσερις μονάδες μαύρου μελανιού, όπου p μονάδες μελανιού αρκούν για να χρωματίσουν ένα κλειστό διάστημα μήκους p. Σε κάθε κίνηση, ο Παναγιώτης επιλέγει έναν θετικό ακέραιο m και δίνει στον Αλέξανδρο $\frac{1}{2^m}$ μονάδες μαύρου μελανιού. Κατόπιν, ο Αλέξανδρος επιλέγει κάποιον μη αρνητικό ακέραιο $k < 2^m$ και χρωματίζει το διάστημα $[\frac{k}{2^m}, \frac{k+1}{2^m}]$. Ο Παναγιώτης κερδίζει αν καταφέρει σε πεπερασμένο αριθμό κινήσεων, να μην υπάρχει καθόλου μελάνι στην παλέττα και να μην έχει καλυφθεί ολόκληρο το διάστημα $[0, 1]$, αλλιώς χάνει. Ποιος παίκτης έχει στρατηγική νίκης?

Γεννήτριες Συναρτήσεις

1. Έστω $a_0, a_1, \ldots$ μια αύξουσα ακολουθία μη αρνητικών ακεραίων τέτοιων ώστε κάθε μη αρνητικός ακέραιος να μπορεί να γραφτεί στη μορφή $a_i + 2a_j + 4a_k$ για κάποιους δείκτες i, j, k, όχι απαραίτητα διακεκριμένους. Να βρεθεί ο a_{1998}.

2. Έστω p ένας περιττός πρώτος αριθμός. Πόσα υποσύνολα του συνόλου $\{1, 2, \ldots, 2p\}$ με p στοιχεία υπάρχουν, τα οποία έχουν άθροισμα στοιχείων που διαιρείται με το p?

3. Να εξετάσετε αν υπάρχει σύνολο $X \subset \mathbb{Z}$ με την ακόλουθη ιδιότητα: για κάθε ακέραιο n υπάρχει ακριβώς μία λύση της εξίσωσης $a + 2b = n$, όπου $a, b \in X$.

4. Η ακολουθία $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ έχει $a_0 = 1, a_1 = 2$ και ικανοποιεί την αναδρομική σχέση $(n+3)a_{n+2} = (6n+9)a_{n+1} - na_n$, για κάθε $n \geq 0$. Να αποδειχθεί ότι όλοι οι όροι της ακολουθίας είναι ακέραιοι.

Πιθανότητες

1. Σε μια πόλη υπάρχουν n κάτοικοι, και καθένας από αυτούς έχει ακριβώς 1000 φίλους (η φιλία είναι αμοιβαία). Να αποδείξετε ότι είναι δυνατόν να επιλέξουμε ένα σύνολο S κατοίκων της πόλης, τέτοιο ώστε τουλάχιστον $\frac{n}{2017}$ από τα μέλη του S να έχουν ακριβώς δύο φίλους στο S.

2. Ένα σύνολο A καλείται *ελεύθερο αθροίσματος* αν δεν υπάρχουν στοιχεία $x, y, z \in A$ (όχι απαραίτητα διακεκριμένα) τέτοια ώστε $x + y = z$. Να αποδειχθεί ότι κάθε σύνολο T μη μηδενικών ακεραίων περιέχει υποσύνολο A με $|A| > |T|/3$ το οποίο είναι *ελεύθερο αθρίσματος*.

3. 2019 σημεία επιλέγονται τυχαία και ομοιόμορφα στον κλειστό μοναδιαίο δίσκο, $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 1\}$. Να εξεταστεί αν είναι πιο πιθανό η κυρτή θήκη των σημείων αυτών να είναι τρίγωνο ή τετράπλευρο.