# Ασκήσεις:

## Γραμμική Άλγεβρα:

1) ~~Έστω $A, B \in M^{2\times 2}(\mathbb{R})$ : $(AB-BA)^n = I_2$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$. Να δειχθεί ότι η άρτιος και ακόμα $(AB-BA)^4 = I_2$~~ (Putnam and Beyond ex 2..)

2) Έστω $A, B \in M^{n\times n}(\mathbb{C})$ : $AB \neq BA$. Έστω ότι $\exists\ p, q, r \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ : $pAB + qBA = I_n$ και $A^2 = rB^2$ (Putnam and Beyond ex 202)
Νδο $p = q$

3) Να δειχθεί ότι $\forall\ x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{Z}$ και $k_1, k_2, \ldots, k_n \in \mathbb{N}^*$ (Putnam and Beyond ex 212)

$$n! \;\Big|\; \begin{vmatrix} x_1^{k_1} & \ldots & x_n^{k_1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ x_1^{k_n} & \ldots & x_n^{k_n} \end{vmatrix}$$

4) Έστω $A, B \in M^{n\times n}(\mathbb{R})$ με $AB = BA$. Νδο αν $\det(A+B) \geq 0$ (Putnam and Beyond ex 217)
τότε $\det(A^k + B^k) \geq 0 \quad \forall k \geq 1$

5) Έστω $A \in M^{n\times n}(\mathbb{R})$ : $A + A^t = 0$. Νδο (Putnam and Beyond ex 218)
$\det(I_n + \lambda A^2) \geq 0$

6) (Ορίζουσα Vandermonde)

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-2} & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-2} & x_2^{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-2} & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

✓

Νδο $V_n = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$

7) Έστω $S : |S| = n$ και $A_1, \ldots, A_{n+1} \subseteq S$ μη κενά. Νδο $\exists$ μη κενά, ξένα μεταξύ τους σύνολα δεικτών $I, J \subseteq \{1, 2, \ldots, n+1\}$ με $\bigcup_{i\in I} A_i = \bigcup_{j \in J} A_j$ (Προκριματικός Σεεμους 2015 Θέμα 5°)

8) ~~Έστω $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ με $a_{ij}a_{ji} \leq 0 \ \forall i, j = 1, 2, \ldots, n$. Νδο ο $A$ έχει τουλάχιστον 2 μη πραγματικές ιδιοτιμές~~ (γνωστή άσκηση — έχει μπει και σε Σεεμους)

9) Έστω $A, B \in M^{2010\times 2010}(\mathbb{R})$ : $A^{2010} = B^{2010} = I$ και $AB = BA$. Νδο αν $tr(AB) = 2010$ τότε $tr(A) = tr(B)$ (2010 IberoAmerican Olympiad for University Students P5)

✓

10) α) Ν.δ.ο. $\forall X \in M_2(\mathbb{C}) \ \exists Y \in M_2(\mathbb{C}) : Y^3 = X^2$

β) Ν.δ.ο. $\exists A \in M_3(\mathbb{C}) : Z^3 \neq A^2 \ \forall Z \in M_3(\mathbb{C})$ ΟΧΙ

(Seemous 2016 P2)

11) Για κάθε ακέραιο $n > 2$ έστω $A, B, C, D \in M_n(\mathbb{R})$ πίνακες:
$AC - BD = I_n$ και $AD + BC = 0$ (Seemous 2015 P

Ν.δ.ο. α) $CA - DB = I_n$ και $DA + CB = 0$

β)* $\det(AC) \geq 0$ και $(-1)^n \det(BD) \geq 0$ ΟΧΙ

12) Έστω $n \in \mathbb{N}^*$ και $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \setminus \{0\} : f(2014) = 1 - f(2013)$

Έστω $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ ανά 2 διαφορετικοί

Αν
$$\begin{vmatrix} 1 + f(x_1) & f(x_2) & \cdots & f(x_n) \\ f(x_1) & 1 + f(x_2) & \cdots & f(x_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f(x_1) & \cdots & \cdots & 1 + f(x_n) \end{vmatrix} = 0$$

(Seemous 2013 P1)

Ν.δ.ο. $f$ όχι συνεχής

13) Αν $A^{-1} + B^{-1} = (A+B)^{-1}$ όπου
$A, B \in M^{n \times n}(\mathbb{R})$ $(n \geq 2)$ ν.δ.ο. $\det(A) = \det(B)$

Ισχύει το ίδιο αν $A, B \in M^{n \times n}(\mathbb{C})$ ?

(IMC 2015 P1 Day 1)

Αναλυση:

1) Έστω $(x_n)_{n\geq 1}$ με $x_{n+m} \leq x_n + x_m$ $\quad n, m \geq 1$

Ν.δ.ο. $\lim \frac{x_n}{n} = \inf \frac{x_n}{n}$ (Putnam and Beyond Ex 380)

2) Ν.δ.ο. $\lim_{n \to +\infty} n^2 \int_0^{1/n} x^{x+1}\, dx = \frac{1}{2}$ (Putnam and Beyond Ex. 318)

3) Έστω $k>1$ ακέραιος. Έστω $a_0 > 0$ και ορίζω

$$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{\sqrt[k]{a_n}} \quad \forall n > 0$$

Νβ το $\lim \frac{a_n^{k+1}}{n^k}$

(Putnam and Beyond Ex. 347)

4) Είναι ο αριθμός $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n^2}}$ ρητός? (Putnam and Beyond Ex. 360)

~~5) Δίνω μία f πολύ αρχή α~~

~~$\frac{f(x)+f(x)}{2}$~~

~~5) Να βρεθεί η μεγαλύτερη σταθερά C ώστε $\forall n \geq 3$~~

5) Να βρεθούν όλες οι συνεχείς συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \to [1, \infty)$ ώστε να $\exists\, a \in \mathbb{R}$ και $k>0$ ακέραιος:

$f(x) f(2x) \dots f(nx) \leq a n^k \quad \forall x \quad \forall n$ θετικό ακέραιο

(Putnam and Beyond Ex 472)

6) Έστω $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής με $\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 x f(x)\, dx = 1$

Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή του $\int_0^1 f^2(x)\, dx$ (Putnam and Beyond Ex 471)

7) Έστω f συνεχής $(f: [0,1] \to \mathbb{R})$

Ν.δ.ο. $\int_0^1 \int_0^1 |f(x) + f(y)|\, dx\, dy \geq \int_0^1 |f(x)|\, dx$

(Κατάλαβα όχι, θέλει μέρα) (Putnam and Beyond Ex 485)

8) Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$ συνεχής και περιοδική συνάρτηση. Ν.δ.ο. $\forall a\in\mathbb{R}$

$$\int_0^T \frac{f(x)}{f(x+a)}\,dx \ge T$$ όπου $T$ η περίοδος της $f$

(2007 Iberoamerican Olympiad for University Students P3)

9) Ν.δ.ο. $\forall\ [a,b]$ $\forall n>0$ ακέραιο $\exists\ k>0$ ακέραιος και διαμέριση $a=x_0<x_1<\dots<x_k=b$ :

(2006 Iberoamerican P4)

ΟΧΙ (δεν έχω λύση)

$$\int_{x_0}^{x_1} f\,dx + \int_{x_2}^{x_3} f\,dx + \dots = \int_{x_1}^{x_2} f\,dx + \int_{x_3}^{x_4} f\,dx + \dots$$

$\forall$ πολυώνυμο $f$ με συντελεστές στο $\mathbb{R}$ $\deg f < n$

10) Έστω $f$ συνεχής σε $[0,1]$ :

i) $f(0)=f(1)=0$

ii) $2f(x)+f(y)=3f\left(\frac{2x+y}{3}\right)$ $\forall x,y\in[0,1]$

Να βρεθούν όλες οι $f$ (Putnam and Beyond Ex 388)

11) Έστω $n\ge 1$ Θέτω $I_n=\int_0^\infty \frac{\arctan x}{(1+x^2)^n}\,dx$

ΟΧΙ Ν.δ.ο. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{I_n}{n} = \frac{\pi^2}{6}$

b) $\int_0^\infty \arctan x \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx = \frac{\pi^2}{6}$

12) Έστω $I\subseteq\mathbb{R}$ ανοιχτό διάστημα που περιέχει το $0$ και $f: I\to\mathbb{R}$ $f\in C^{2016}(I)$ με $f^{(i)}(0)=0$ $\forall i=0,1,2,\dots,2015$ και $f^{(2016)}(0)<0$

Ν.δ.ο. $\exists\ \delta>0$ : $0<f(x)<x$ $\forall x\in(0,\delta)$

((c) ερώτημα του Seemous 2015 P4)

13) Έστω $f(x)$ $0\le x\le 1$ συνεχής με τιμές στο $\mathbb{R}$ Ν.δ.ο.

$\lim_{n\to\infty}(n+1)\int_0^1 x^n f(x)\,dx = f(1)$ (Berkeley Problems in Mathematics

14) Για $a>0$ Νδο $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\cos ax\,dx = \sqrt{\pi}\, e^{-a^2/4}$

(Putnam and Beyond Ex 488)

15) Νβ $\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{m!\,n!}{(m+n+2)!}$ (Putnam and Beyond Ex 372)

# Ασκήσεις στις γεννήτριες και λοιπές ασκήσεις

1) Έστω ακολουθία $a_0, a_1, a_2, \dots$ θετικών αριθμών για την οποία ισχύει

$$a_n = \sum_{k=n-1}^{\infty} \frac{a_k}{k+2} \qquad n=1,2,\dots$$

και $\sum a_n = e$

Να βρεθεί το $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$ → θεωρία χρήση γεννήτριας

(Προκριματικός Seemous 2017 Πρόβλημα 1)

2) Να βρεθεί το $\sum_{k=0}^{6^n} (-1)^k \binom{6^n-k}{k}$ $\quad n \geq 0$

(Προκριματικός Seemous 2018 Πρόβλημα 2)

Εφαρμογή (για τώρα) — ίσως και ένα ~~...~~ θεώρημα για Fibonacci σαν εφαρμογή

$a_0 = 0$

$a_{k+1} = 2a_k + 1$

Νβ τύπο για $a_k$

3) Νδο $\forall n = 1, 2, \dots$ $\quad 2^{n-1} \mid \sum_{0 \leq k < \frac{n}{2}} \binom{n}{2k+1} 5^k$

(IMC 2008 P3 Day 2)