1) εχουμε εναν $n \times n$ πινακα A, του οποιου τα αθροισματα των στοιχειων καθε γραμμης ειναι 2. Ποσο ειναι το αθροισμα των γραμμων του A^5;

(Επιλέγουμε διάφορους πίνακες με την δοθείσα ιδιότητα, για να ελέγξω την λύση.
π.χ. $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & & 0 \\ & 2 & \\ 0 & & \ddots \; 2 \end{pmatrix} = A \to A^5 = \begin{pmatrix} 2^5 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 2^5 \end{pmatrix}$)

Αν $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \end{pmatrix}$ τότε $Av = 2v$ άρα $A^5 v = A^4(2v) = 2A^4 v = 4A^3 v = \dots = 32v$

2) Υπαρχουν πινακες B, C $M_2(\mathbb{R})$ ώστε $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = B^2 + C^2$;

Μπορώ να γράψω το $B^2 + C^2 = (B+iC)(B-iC)$
Όμως λόγω υπόθεσης $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (B+iC)(B-iC) \Rightarrow \det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \det[(B+iC)(B-iC)]$

$-1 = \det(B+iC) \cdot \overline{\det(B+iC)} = |\det(B+iC)|^2$ άτοπο.

3) Εστω πινακες $A, B, C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ με A αντιστρεψιμο και $(A-B)C = BA^{-1}$ Νδο $C(A-B) = A^{-1}B$

Έχω: $AC - BC = BA^{-1} \Rightarrow AC - BC - BA^{-1} + I = I \Rightarrow -B(C+A^{-1}) + A(C+A^{-1}) = I$
$\Rightarrow (C+A^{-1})(A-B) = I$.

ιδιοτιμη
λ $\quad Av = \lambda v \Rightarrow (A - \lambda I)v = 0 \Leftrightarrow \det(A - \lambda I) = 0$

$\operatorname{rank}(AB) \leq \min\{\operatorname{rank}(A), \operatorname{rank}(B)\}$

4) Βρείτε όλες τις επί συναρτήσεις $F: M_{n\times n}(\mathbb{R}) \to \{0,1..n\}$ ώστε $F(XY) \le \min\{F(X), F(Y)\}$ $\forall X, Y \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$

(Προφανώς για $f(A) = \text{rank}(A)$)

Αν Y ταυτοτικός: $f(X) \le f(I_n)$

Αν X αντιστρέψιμος και $Y = X^{-1}$: $f(X\cdot X^{-1}) \le f(X) \Rightarrow$

$\Rightarrow f(I_n) \le f(X)$.

Οπότε τελικά ισχύει $f(X) = f(I_n)$ για X αντιστρέψιμο

$X \sim J_k$ $\quad f(X) = f(J_k)$. Όμως $f(J_k) \ge k$ τότε $f(J_k) \le f(J_{k+1})$

γιατί $J_k \cdot J_{k+1} = J_k$ άρα $f(J_k \cdot J_{k+1}) = f(J_k) \le f(J_{k+1})$.

5) $A \in M_n(\mathbb{R})$ ώστε καθε στοιχείο του είναι $1, -1$

Ν.δ.ο $2^{n-1} \mid \det A$

... Προσθέτω την τελευταία γραμμή με όλες τις γραμμές.

$\det A = 2^{n-1} \det Z$

6)

Α $a \ne b$ να βρείτε την $\det\begin{pmatrix} c_1 & a & a & a \\ b & c_2 & a & \\ & b & \ddots & \\ b & b & b & c_n \end{pmatrix}$

έστω $f(x) = \det\begin{pmatrix} c_1 - x & a-x & \dots & a-x \\ b-x & c_2-x & & a-x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b-x & b-x & & c_n - x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1-x-b & b-a \\ b-c_2 & \end{pmatrix}$

$\varphi(x) = (c_1 - x)\cdot(c_2 - x)\cdot \dots \cdot(c_n - x)$

$f(a) = \varphi(a)$ και $f(b) = \varphi(b)$

$$f(0) = \frac{b\varphi(a) - a\varphi(b)}{b-a}$$

7) Θεωρώ $A(n,k) = \begin{pmatrix} \binom{n}{0} & \cdots & \binom{n}{k} \\ \vdots & & \\ \binom{n+k}{0} & \cdots & \binom{n+k}{k} \end{pmatrix}$

να υπολογίσετε την $\det(A(n,k))$.

$k=0: \ \det(A(n,0)) = 1$

$k=1: \ \det(A(n,1)) = 1$

$k=2: \ \det(A(n,2)) = 1$

$$\det(A(n,k)) = \det \begin{pmatrix} 1 & \binom{n}{1} \cdots & \binom{n}{k} \\ 0 & \binom{n+1}{1}+\binom{n}{1} & \\ \vdots & & \\ 0 & & \end{pmatrix}$$

Ξέρουμε ότι:

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

Άρα
$$\det \begin{pmatrix} 1 & \binom{n}{k} & \cdots & \binom{n}{1} \\ 0 & \binom{n}{0} & & \binom{n}{k-1} \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & \binom{n+k-1}{0} & & \binom{n+k-1}{k-1} \end{pmatrix} =$$

Αφαιρώ γραμμές

$= \det(A(n,k-1))$

Με επαγωγή $\det(A(n,k)) = 1$

Θεώρημα:

$\det\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \det A \cdot \det$

Β' τρόπος

$$A(n+1,k) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & 0 \\ & 1 & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} A(n,k)$$

* Όμοιοι πίνακες έχουν ίδιο χαρακτηρ. πολυώνυμο

$Tr(A+B) = Tr(A) + Tr(B)$
$Tr(AB) = Tr(BA)$

8) έστω $A, B \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ με $A^2 + B^2 = 2AB$
ν.δ.ο. a) $AB = BA$ b) $TrA = TrB$

a) $(A-B)^2 = A^2 - BA - AB + B^2 = AB - BA$

ΑΚΥΡΟ

$\chi((A-B)^2) = (A-B)^4 + (\det(A-B))^2 I_2 = 0$

C-H $(A-B)^4 = -\det^2(A-B) I_2$

$(AB-BA)^2 = -\det^2(A-B) I_2$

C-H $-\det^2(A-B) I_2 + \det(AB-BA) = 0$

$\det(A-B)^2 = \det(AB-BA)$

$Tr(A) = \lambda_1 + \dots + \lambda_n$
$\det(A) = \lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_n$
$\chi(\lambda) = \lambda^2 - Tr(A)\lambda + \det(A)$

θ.δ.ο. $(A-B)^2 = 0 \Rightarrow \det(A-B)^2 = 0$
έστω $\det(A-B)^2 \neq 0$ τότε $\exists$ αντιστρ. έστω X
$XA = BX$ και ισχύει $X(A-B) = I_2 \Rightarrow XA - XB = I_2$
$BX - XB = I_2$
$Tr(BX - XB) = Tr\, I_2$ άτοπο αφού $Tr\, I_2 = 2$
Άρα $\det(A-B) = 0$.

$(AB - BA)^2 = 0$
$(A-B)^2 = AB - BA \Rightarrow \underbrace{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}_{Tr(A-B)^2} = 0$

b) $Tr(A-B) = \lambda_1 + \lambda_2 = 0 + 0 = 0$

$\Rightarrow Tr(A) = Tr(B)$

9) $\det(A+B) = \sum_{I \subseteq [n]} \det(A_I * B_{I^c})$ Κανονας του Leibnitz

9) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ με $f(2014) = 1 - f(2013)$
και $\exists\, x_1, \dots, x_n$ διαφ. ανα δυο με

$$\begin{vmatrix} 1+f(x_1) & f(x_2) & f(x_n) \\ f(x_1) & 1+f(x_2) & \\ & & \\ f(x_1) & f(x_2) & 1+f(x_n) \end{vmatrix} = 0$$

ν.δ.ο. f όχι συνεχής

$$\det(J_f + I_n) = 0 \Rightarrow 1 + \begin{vmatrix} 1 & & f(x_1) & \\ & 1 & f(x_1) & \\ & & \vdots & \ddots \\ & & f(x_1) & & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$\to 1 + f(x_i) + \dots + f(x_n) = 0$
Αν ήταν συνεχής θα διατηρεί πρόσημο
(Θ. Bolzano $\to$ Ατοπο)