ΓΕΝΝΗΤΡΙΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

Αντώνης Οικονόμου

1-2/12/2007

Θεωρία

Για μια εξαιρετική εισαγωγή στις γεννήτριες συναρτήσεις και στις εφαρμογές τους στη Συνδυαστική αλλά και σε άλλες περιοχές των μαθηματικών, προτείνεται το βιβλίο του

Herbert S. Wilf (1994) Generatingfunctionology, 2nd edition

που βρίσκεται διαθέσιμο σε μορφή pdf (acrobat reader) στην προσωπική ιστοσελίδα του συγγραφέα:

`http://www.math.upenn.edu/~wilf/`

Με τις γεννήτριες συναρτήσεις αποκτά κανείς ένα ισχυρότατο εργαλείο για τη μελέτη ακολουθιών. Με χρήση γεννητριών μπορεί κανείς να δώσει απαντήσεις σε πολλά ερωτήματα του τύπου:

- Να βρεθεί κλειστός τύπος για το γενικό όρο μιας ακολουθίας.
- Να βρεθεί μια αναδρομική σχέση για τον υπολογισμό των όρων μιας ακολουθίας.
- Να βρεθούν μέσοι όροι και άλλες στατιστικές ιδιότητες των όρων μιας ακολουθίας.
- Να μελετηθεί η οριακή συμπεριφορά μιας ακολουθίας.
- Να αποδειχθούν ιδιότητες μονοτονίας και κυρτότητας μιας ακολουθίας.
- Να υπολογιστούν αθροίσματα και να αποδειχθούν ταυτότητες που σχετίζονται με τους όρους μιας ακολουθίας.

Στα πλαίσια αυτής της διάλεξης θα περιοριστούμε στη χρήση γεννητριών για την εύρεση κλειστών τύπων για το γενικό όρο ακολουθιών καθώς και για τον υπολογισμό αθροισμάτων και την απόδειξη ταυτοτήτων.

Ασκήσεις

1. Δίνεται η ακολουθία $(a_k)_{k=0,1,2,\ldots}$ που ορίζεται αναδρομικά από τις σχέσεις $a_0 = 0$ και $a_{k+1} = 2a_k + 1$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Να βρεθεί ένας κλειστός τύπος για το γενικό όρο a_k.

2. Δίνεται η ακολουθία $(a_k)_{k=0,1,2,\ldots}$ που ορίζεται αναδρομικά από τις σχέσεις $a_0 = 1$ και $a_{k+1} = 2a_k + k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Να βρεθεί ένας κλειστός τύπος για το γενικό όρο a_k.

3. Δίνεται η ακολουθία των αριθμών Fibonacci $(F_k)_{k=0,1,2,\ldots}$ που ορίζεται αναδρομικά από τις σχέσεις $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ και $F_{k+1} = F_k + F_{k-1}$, $k = 1, 2, \ldots$. Να βρεθεί ένας κλειστός τύπος για το γενικό όρο F_k.

4. Ένας μαθητής έχει k ευρώ. Κάθε μέρα αγοράζει ακριβώς ένα από τα παρακάτω: ένα κρουασάν που κοστίζει 1 ευρώ, μια τυρόπιτα που κοστίζει 2 ευρώ ή μια μπουγάτσα που κοστίζει 2 ευρώ μέχρι που να ξοδευτούν όλα τα λεφτά. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να ξοδέψει τα λεφτά του;

5. Έστω $S(n, k)$ ο αριθμός των διαμερίσεων του συνόλου $\{1, 2, \ldots, n\}$ σε k μη-κενά υποσύνολα. Να βρείτε έναν τύπο για τον υπολογισμό του $S(n, k)$.

6. Μια στοίβα νομισμάτων είναι μια τοποθέτηση n νομισμάτων σε σειρές έτσι ώστε τα νομίσματα της πρώτης σειράς να σχηματίζουν μια συμπαγή σειρά και σε όλες τις υψηλότερες σειρές κάθε νόμισμα να ακουμπά σε ακριβώς 2 νομίσματα της αμέσως χαμηλότερης σειράς. Αν η πρώτη σειρά έχει k νομίσματα τότε μιλάμε για μια (n, k) στοίβα. Αν τα νομίσματα κάθε σειράς είναι συνεχόμενα και δεν υπάρχουν κενά τότε λέμε ότι πρόκειται για συμπαγή στοίβα νομισμάτων. Να βρείτε έναν τύπο για τον υπολογισμό του πλήθους των συμπαγών στοιβών που έχουν βάση (πρώτη σειρά) με k νομίσματα. Αποδείξτε ότι ο αριθμός αυτός είναι ο αριθμός Fibanacci F_{2k-1}.

7. Ένας τζογαδόρος ξεκινάει με 1 ευρώ και παίζει ποντάροντας 1 ευρώ σε κάθε παιχνίδι μέχρι να μαζέψει n ευρώ ή να χρεωκοπήσει. Σε κάθε παιχνίδι η πιθανότητα επιτυχίας είναι p, $(p \in (0, 1))$ και η πιθανότητα αποτυχίας είναι $q = 1 - p$. Να βρεθούν:

   (a) η πιθανότητα χρεωκοπίας

   (b) ο μέσος αριθμός παιχνιδιών που θα παίξει

8. Έστω $U(n)$ ο αριθμός των τρόπων για να καλυφθεί μια $3\times n$ σκακιέρα με ντόμινα, δηλαδή πλακίδια 1×2. Να βρείτε έναν κλειστό τύπο για το $U(n)$.

9. Πόσες διαφορετικές λέξεις μήκους n μπορούν να σχηματιστούν με τα γράμματα α,β,γ,δ έτσι ώστε τα γράμματα α και β να μην είναι ποτέ διαδοχικά.

10. Μια επιτρεπόμενη τοποθέτηση n ζευγών παρενθέσεων είναι μια τοποθέτηση με την ιδιότητα να μη βλέπουμε παραπάνω δεξιές παρενθέσεις από αριστερές καθώς σαρώνουμε την τοποθέτηση από τα αριστερά προς τα δεξιά. Π.χ. υπάρχουν 5 επιτρεπόμενες τοποθετήσεις για 3 ζεύγη παρενθέσεων. Είναι οι

$$((())),\ (()()),\ (())(),\ ()()(),\ \text{και}\ ()(()).$$

Να βρείτε έναν κλειστό τύπο για το πλήθος $C(n)$ των επιτρεπόμενων τοποθετήσεων n ζευγών παρενθέσεων.

11. Να υπολογιστεί το άθροισμα

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{k}{n-k}.$$

12. Να υπολογιστεί το άθροισμα

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k}{m+2k}\binom{2k}{k}\frac{(-1)^k}{k+1}.$$

13. Να υπολογιστεί το άθροισμα

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k}{2k} 2^{n-k}.$$

14. Αποδείξτε ότι

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{m}{k}\binom{n+k}{m} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{m}{k}\binom{n}{k} 2^k.$$

15. Να υπολογιστεί το άθροισμα

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{2n+1}{2p+2k+1}\binom{p+k}{k}.$$

16. Να υπολογιστεί το άθροισμα

$$\sum_{m=0}^{t} \binom{r}{m}\binom{s}{t-m}.$$

17. Αποδείξτε ότι
$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{2n+1}{2k} \binom{m+k}{2n} = \binom{2m+1}{2n}.$$

18. Αποδείξτε ότι για κάθε $n \geq 0$
$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} \binom{k}{j} x^k = \binom{n}{j} x^j (1+x)^{n-j}.$$