Προβλήματα για το διαγωνισμό επιλογής για τη Μαθηματικό Διαγωνισμό IMC 2016

Ιούνιος 2016

Πρόβλημα 1: Θέτουμε $\mathbb{S} = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 : a^2 + b^2 = 1\}$. Δείξτε ότι για κάθε συνεχή συνάρτηση $f : \mathbb{S} \to \mathbb{R}$ υπάρχει $x \in \mathbb{S}$ τέτοιο ώστε $f(x) = f(-x)$.

Πρόβλημα 2: Βρείτε όλους τους θετικούς ακεραίους n που έχουν την εξής ιδιότητα: η ορίζουσα κάθε συμμετρικού $n \times n$ πίνακα με στοιχεία ακεραίους αριθμούς και μηδενικά πάνω στην κύρια διαγώνιο είναι άρτιος αριθμός.

Πρόβλημα 3: Δίνεται ακολουθία συναρτήσεων $(f_n)_{n \geq 1}$ με $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, φραγμένη απόλυτα από το 1 και τέτοια ώστε $|f_n(x) - f_n(y)| \leq n^2|x-y|$ για $x, y \in [0,1]$ και $n \geq 1$. Δείξτε ότι για τη συνάρτηση

$$F(x) \; := \; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} f_n(x)$$

υπάρχει $C \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε

$$|F(x) - F(y)| \; \leq \; C|x-y|^{1/2}$$

για όλα τα $x, y \in [0,1]$. Δείξτε επίσης ότι μπορεί κανείς να επιλέξει $C = 3\sqrt{2}$.

Πρόβλημα 4: Δίνεται ένας πρώτος $p > 2$.

(α) Να βρείτε έναν $(p-1) \times (p-1)$ πίνακα A διάφορο του ταυτοτικού με στοιχεία ακέραιους αριθμούς, τέτοιον ώστε $A^p = \mathrm{Id}_{p-1}$.

(β) Να δείξετε ότι για $1 < \ell < p-1$, ο ταυτοτικός είναι ο μόνος $\ell \times \ell$ πίνακας A με στοιχεία ακέραιους αριθμούς, τέτοιος ώστε $A^p = \mathrm{Id}_\ell$.

Πρόβλημα 5: Συμβολίζουμε με $a(n,k)$ το πλήθος των επί απεικονίσεων $f : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, k\}$. Δείξτε ότι

$$\sum_{k=1}^{n} (-2)^{n-k} \, a(n,k) \; = \; 0$$

για κάθε άρτιο θετικό ακέραιο n.

Η διάρκεια της εξέτασης είναι 3 ώρες. **ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!**

Λύσεις

Πρόβλημα 1: Ας υποθέσουμε ότι δεν υπάρχει τέτοιο $x \in \mathbb{S}$. Τότε η απεικόνιση $g : \mathbb{S} \to \{-1, 1\}$ με

$$g(x) \;=\; \frac{f(x) - f(-x)}{|f(x) - f(-x)|}$$

για $x \in \mathbb{S}$ είναι καλά ορισμένη και συνεχής στο $\mathbb{S}$. Αφού $g(-x) = -g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{S}$, η g είναι επί του $\{-1, 1\}$. Όμως, οι παραπάνω ιδιότητες της g έρχονται σε αντίθεση με τη συνεκτικότητα του $\mathbb{S}$. Από την αντίφαση αυτή έπεται το ζητούμενο. Φυσικά, η απόδειξη αυτή γενικεύεται για κάθε μη κενό συνεκτικό υπόχωρο $\mathbb{S}$ του $\mathbb{R}^d$ με την ιδιότητα $-x \in \mathbb{S}$ για κάθε $x \in \mathbb{S}$.

Πρόβλημα 2: Απλά παραδείγματα δείχνουν ότι οι άρτιοι θετικοί ακέραιοι δεν έχουν αυτή την ιδιότητα. Το αντίθετο ακριβώς ισχύει για τους περιττούς. Πράγματι, θεωρούμε τον τύπο

$$\det(A) \;=\; \sum_{w \in S_n} \epsilon(w)\, a_{1w(1)} a_{2w(2)} \cdots a_{nw(n)}$$

για την ορίζουσα ενός $n \times n$ πίνακα $A = (a_{ij})$, όπου $\epsilon(w) \in \{-1, 1\}$ είναι το πρόσημο της μετάθεσης $w \in S_n$, και υποθέτουμε ότι ο A είναι συμμετρικός πίνακας με ακέραια στοιχεία και μηδενικά πάνω στην κύρια διαγώνιο. Τότε οι όροι του αθροίσματος που αντιστοιχούν σε μεταθέσεις που έχουν τουλάχιστον ένα σταθερό σημείο είναι ίσοι με μηδέν. Αν ο n είναι περιττός, τότε οι υπόλοιπες μεταθέσεις χωρίζονται σε ζευγάρια $\{w, w^{-1}\}$ μεταθέσεων με $w \neq w^{-1}$, τα μέλη w και w^{-1} των οποίων έχουν την ίδια συνεισφορά στο άθροισμα. Αυτό δείχνει ότι η ορίζουσα του A είναι άρτιος ακέραιος.

Πρόβλημα 3: Για κάθε θετικό ακέραιο k έχουμε

$$\begin{aligned} |F(x) - F(y)| &\le \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n^2} |f_n(x) - f_n(y)| + \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} |f_n(x) - f_n(y)| \\ &\le k|x-y| + 2 \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \le k|x-y| + 2\int_k^{\infty} \frac{1}{x^2}\, dx \\ &= k|x-y| + \frac{2}{k}. \end{aligned} \tag{1}$$

Η τελευταία ποσότητα ελαχιστοποιείται για $k = \sqrt{2/|x-y|}$. Επιλέγοντας $k = \left\lceil \sqrt{\frac{2}{|x-y|}} \right\rceil \ge 1$, έχουμε $k \le \sqrt{2/|x-y|}$ και $1/k \le 2/(k+1) \le 2\sqrt{|x-y|/2} = \sqrt{2}\sqrt{|x-y|}$. Αντικαθιστώντας αυτά τα φράγματα στην (1) παίρνουμε το ζητούμενο.

Πρόβλημα 4: Ένας τέτοιος πίνακας A είναι ο

$$M = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ο οποίος είναι ο συνοδός πίνακας του $f(x) = x^{p-1} + x^{p-2} + \cdots + x + 1$ και συνεπώς έχει χαρακτηριστικό πολυώνυμο το $f(x)$. Αφού το $f(x)$ διαιρεί το $x^p - 1$, έχουμε $A^p = \mathrm{Id}_{p-1}$.

Έστω A ένας $\ell \times \ell$ πίνακας με στοιχεία ακεραίους αριθμούς, τέτοιος ώστε $A^p = \mathrm{Id}_\ell$. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A έχει ακέραιους συντελεστές και εξ' ορισμού, το ελάχιστο πολυώνυμο $g(x)$ ανήκει στο $\mathbb{Q}[x]$. Επιπλέον, θα πρέπει το $g(x)$ να διαιρεί το $x^p - 1$. Αφού το $f(x)$ είναι ανάγωγο στο $\mathbb{Q}[x]$ θα πρέπει $g(x) = x - 1$ ή $g(x) = f(x)$.

Εναλλακτικά, μπορεί κανείς να εργαστεί με ιδιοτιμές, οι οποίες είναι p-ρίζες της μονάδας, και με ένα επιχείρημα της θεωρίας Galois.

Πρόβλημα 5: *Πρώτη Λύση.* Παρατηρούμε ότι το $a(n,k)$ είναι ίσο με το πλήθος των διατεταγμένων διαμερίσεων $(B_1, B_2, \ldots, B_k)$ του συνόλου $\{1, 2, \ldots, n\}$ με k μέρη (θέτοντας $B_i = f^{-1}(\{i\})$ για μια επί απεικόνιση $f : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, k\}$ και $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$). Παρατάσσοντας τα στοιχεία του B_1 σε αύξουσα διάταξη, έπειτα εκείνα του B_2 σε αύξουσα διάταξη κ.ο.κ. κατασκευάζουμε, από κάθε τέτοια διαμέριση, μια μετάθεση $w \in S_n$. Υπολογίζοντας το πλήθος των διατεταγμένων διαμερίσεων που αντιστοιχούν σε δοσμένη μετάθεση βρίσκουμε ότι

$$\sum_{k=1}^{n} a(n,k) x^k \ = \ \sum_{w \in S_n} x^{\mathrm{des}(w)+1} \, (1+x)^{n-1-\mathrm{des}(w)},$$

όπου $\mathrm{des}(w)$ είναι το πλήθος των δεικτών $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ με $w(i) > w(i+1)$. Θέτοντας $x = -1/2$ στην προηγούμενη ισότητα βρίσκουμε ότι

$$\sum_{k=1}^{n} a(n,k)(-1/2)^k \ = \ (1/2)^{n-1} \sum_{w \in S_n} (-1)^{\mathrm{des}(w)+1}.$$

Το ζητούμενο έπεται παρατηρώντας ότι το άθροισμα στο δεξιό μέλος είναι ίσο με μηδέν αν το n είναι άρτιος αριθμός.

Δεύτερη λύση. Θέτουμε $h(n) = \sum_{k=1}^{n} (-2)^{n-k} a(n,k)$. Με συνηθισμένες τεχνικές μπορεί να υπολογίσει κανείς την εκθετική γεννήτρια συνάρτηση $H(x) := \sum_{n \geq 1} h(n) \, x^n / n!$ ως

$$H(x) \ = \ \frac{e^{2x} - 1}{1 + e^{2x}}.$$

Παρατηρούμε ότι $H(-x) = -H(x)$ και συμπεραίνουμε ότι $h(n) = 0$ για κάθε άρτιο θετικό n.