

Προβλήματα για το διαγωνισμό επιλογής της ΕΜΕ
για τη Μαθηματική Ολυμπιάδα πρωτοετών και δευτεροετών
φοιτητών
31 Ιανουαρίου 2015

Πρόβλημα 1: Υπολογίστε την $n \times n$ ορίζουσα

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 + y_1 & x_2 + y_1 & \cdots & x_n + y_1 \\ (x_1 + y_1)(x_1 + y_2) & (x_2 + y_1)(x_2 + y_2) & \cdots & (x_n + y_1)(x_n + y_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (x_1 + y_1) \cdots (x_1 + y_{n-1}) & (x_2 + y_1) \cdots (x_2 + y_{n-1}) & \cdots & (x_n + y_1) \cdots (x_n + y_{n-1}) \end{pmatrix}$$

για πραγματικούς αριθμούς $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_{n-1}$.

Πρόβλημα 2: Δίνεται διαφορίσιμη συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ και τέτοια ώστε

$$3/2 + \int_1^x f(t) dt = f(x) + \frac{1}{2}(f(x))^2$$

για κάθε $x > 0$.

- (α) Δείξτε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή στο $(0, +\infty)$.
- (β) Υπολογίστε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)/x$.

Πρόβλημα 3: Για θετικούς ακεραίους n θέτουμε $f(n) = \sum_{d|n} (-1)^{\frac{d-1}{2}}$, όπου στο άθροισμα το d διατρέχει όλους τους περιττούς θετικούς διαιρέτες του n . Προσδιορίστε όλους τους θετικούς ακεραίους n για τους οποίους $f(n) = 0$.

Πρόβλημα 4: Για $p > 0$ η συνάρτηση Γάμμα ορίζεται ως

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} x^{p-1} e^{-x} dx.$$

Θεωρήστε γνωστό ότι $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$ για κάθε $p > 0$ και ότι $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

- (α) Δείξτε ότι $\Gamma(p + \frac{1}{2}) < \Gamma(p)\sqrt{p}$ για κάθε $p > 0$.
- (β) Δείξτε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi(n + \frac{1}{2})}} < \binom{2n}{n} \frac{1}{2^{2n}} < \frac{1}{\sqrt{\pi n}}.$$

Πρόβλημα 5: Δίνονται σύνολο S με n στοιχεία και μη κενά υποσύνολα A_1, A_2, \dots, A_{n+1} του S . Δείξτε ότι υπάρχουν μη κενά, ξένα μεταξύ τους σύνολα δεικτών $I, J \subseteq \{1, 2, \dots, n+1\}$ τέτοια ώστε $\cup_{i \in I} A_i = \cup_{j \in J} A_j$.

Η διάρκεια της εξέτασης είναι 3 ώρες.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!

Λύσεις

Πρόβλημα 1: Θεωρούμε τη δοσμένη ορίζουσα ως πολυώνυμο στις μεταβλητές x_1, x_2, \dots, x_n . Αφου η ορίζουσα έχει δύο στήλες ίσες αν $x_i = x_j$ για δύο διαφορετικούς δείκτες i και j , το πολυώνυμο αυτό διαιρείται με το $x_j - x_i$ για $1 \leq i < j \leq n$ και συνεπώς με το γινόμενο $\prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$. Εύκολα υπολογίζουμε ότι ο συντελεστής του μονωνύμου $x_n^{n-1} x_{n-1}^{n-2} \cdots x_2$ στο πολυώνυμο αυτό είναι ίσος με 1 και συμπεραίνουμε ότι η δοσμένη ορίζουσα είναι ίση με $\prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$, άρα ανεξάρτητη των y_1, \dots, y_{n-1} .

Πρόβλημα 2: (α) Επειδή η f είναι διαφορίσιμη, με παραγωγή της δύο μελών της δεδομένης ισότητας λαμβάνουμε

$$f(x) = f'(x) + f(x)f'(x)$$

για κάθε $x > 0$. Επομένως, έχουμε

$$f'(x) = \frac{f(x)}{1 + f(x)} > 0 \quad (1)$$

για κάθε $x > 0$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$. Επειδή η f είναι διαφορίσιμη, μέσω της (1) ορίζεται και η δεύτερη παράγωγος της f και ισχύει

$$f''(x) = \frac{f'(x)}{(1 + f(x))^2} > 0 \quad (2)$$

για κάθε $x > 0$, οπότε η συνάρτηση f είναι κυρτή στο $(0, +\infty)$.

(β) Επειδή η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και κυρτή στο $(0, +\infty)$, έχουμε $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ και συνεπώς

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)/x = \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{1 + f(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{1 + f(x)}\right) = 1.$$

Πρόβλημα 3: Παρατηρούμε ότι $f(mn) = f(m)f(n)$ αν οι m και n είναι σχετικώς πρώτοι και υπολογίζουμε ότι $f(2^r) = 1$, ότι $f(p^r) = r + 1$ για κάθε πρώτο αριθμό p της μορφής $p = 4k + 1$ και ότι για κάθε πρώτο αριθμό q της μορφής $q = 4k + 3$ έχουμε $f(q^r) = 1$ αν ο r είναι άρτιος και $f(q^r) = 0$ αν ο r είναι περιττός. Από αυτά συμπεραίνουμε ότι $f(n) = 0$ και μόνο αν ο n διαιρείται από τον q^r αλλά όχι από τον q^{r+1} για κάποιο πρώτο της μορφής $q = 4k + 3$ και κάποιον περιττό θετικό ακέραιο r .

Πρόβλημα 4: (α) Με τη βοήθεια της ανισότητας Cauchy-Schwarz βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} \Gamma(p + \frac{1}{2}) &= \int_0^\infty \sqrt{x} \cdot x^{p-1} e^{-x} dx \leq \left(\int_0^\infty x^p e^{-x} dx \cdot \int_0^\infty x^{p-1} e^{-x} dx \right)^{1/2} \\ &= (\Gamma(p+1) \Gamma(p))^{1/2} = \sqrt{p} \Gamma(p). \end{aligned}$$

(β) Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} \binom{2n}{n} \frac{1}{2^{2n}} &= \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{2n}} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{n! 2^n} \times \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}{n! 2^n} \\ &= \frac{1}{n!} \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdots (n - \frac{1}{2}) = \frac{1}{\sqrt{\pi n!}} \Gamma(\frac{1}{2}) \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdots (n - \frac{1}{2}). \end{aligned}$$

Εφαρμόζοντας διαδοχικά την ταυτότητα $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$ για $p = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots, n - \frac{1}{2}$ βρίσκουμε ότι

$$\binom{2n}{n} \frac{1}{2^{2n}} = \frac{\Gamma(n + \frac{1}{2})}{\sqrt{\pi n!}}.$$

Εφόσον $\Gamma(1) = 1$, από την $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$ έχουμε επαγωγικά ότι $\Gamma(n+1) = n!$. Εφαρμόζοντας το αποτέλεσμα του ερωτήματος (α) για $p = n + \frac{1}{2}$ παίρνουμε

$$\binom{2n}{n} \frac{1}{2^{2n}} = \frac{\Gamma(n + \frac{1}{2})}{\sqrt{\pi} \Gamma(n + 1)} > \frac{1}{\sqrt{\pi(n + \frac{1}{2})}}.$$

Εφαρμόζοντας το αποτέλεσμα του ερωτήματος (α) για $p = n$ παίρνουμε

$$\binom{2n}{n} \frac{1}{2^{2n}} = \frac{\Gamma(n + \frac{1}{2})}{\sqrt{\pi n} \Gamma(n)} < \frac{1}{\sqrt{\pi n}}. \quad \square$$

Πρόβλημα 5: Έστω $S = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Θεωρούμε το ομογενές σύστημα των n γραμμικών εξισώσεων

$$\sum_{r \in \{1, \dots, n+1\}: a_k \in A_r} x_r = 0, \quad 1 \leq k \leq n$$

σε $n+1$ αγνώστους $x_1, x_2, \dots, x_{n+1} \in \mathbb{R}$. Ως γνωστόν, ένα τέτοιο σύστημα έχει τουλάχιστον μία μη μηδενική λύση $(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$. Έστω $I = \{i : x_i > 0\}$ και $J = \{j : x_j < 0\}$ και έστω $y_j = -x_j$ για $j \in J$. Προφανώς τα I και J είναι μη κενά, ξένα μεταξύ τους υποσύνολα του συνόλου $\{1, 2, \dots, n+1\}$ και για κάθε $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ ισχύει

$$\sum_{i \in I: a_k \in A_i} x_i = \sum_{j \in J: a_k \in A_j} y_j.$$

Από την ισότητα αυτή έπεται ότι $a_k \in \cup_{i \in I} A_i$ αν και μόνο αν $a_k \in \cup_{j \in J} A_j$ για κάθε k , οπότε $\cup_{i \in I} A_i = \cup_{j \in J} A_j$.