Διαγωνισμός επιλογής για την Μαθηματική Ολυμπιάδα πρωτοετών και δευτεροετών φοιτητών *SEEMOUS*
Αθήνα, 26 Ιανουαρίου 2013
Θέματα και λύσεις

1. (α) Έστω I_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, διαστήματα που περιέχονται στο $(0, 1)$ και ας υποθέσουμε ότι το άθροισμα των μηκών τους είναι $\sum_{k=1}^{n} |I_k| = 20$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένας αριθμός του $(0, 1)$ που ανήκει σε τουλάχιστον 5 από τα διαστήματα I_k.

(β) Θα ονομάζουμε 'ταινία' S κάθε σύνολο σημείων του επιπέδου που περικλείεται αυστηρά ανάμεσα σε δυο παράλληλες ευθείες και ορίζουμε ως πλάτος της, $|S|$, την απόσταση των ευθειών που την ορίζουν. Έστω μια ακολουθία ταινιών $(S_i)_{i=1,2,\ldots}$ στο επίπεδο. Αν $\sum_{i=1}^{\infty} |S_i| < \infty$, να αποδείξετε ότι υπάρχουν σημεία του επιπέδου που δεν ανήκουν σε καμία από τις $(S_i)_{i=1,2,\ldots}$.

Λύση: (α) Θέτουμε $f_k(x)$ τη δείκτρια συνάρτηση του διαστήματος I_k, για $k = 1, 2, \ldots, n$ που είναι 1 για τα $x \in I_k$ και 0 διαφορετικά. Επίσης ορίζουμε $F(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$, τη συνάρτηση που μετράει σε πόσα από τα I_k ανήκει κάθε $x \in (0, 1)$. Έστω, προς το άτοπο, ότι κάθε αριθμός του $(0, 1)$ ανήκει το πολύ σε 4 από τα διαστήματα I_k, $k = 1, 2, \ldots, n$. Τότε $F(x) \le 4$, $x \in (0, 1)$ και έχουμε

$$20 = \sum_{k=1}^{n} |I_k| = \sum_{k=1}^{n} \int_0^1 f_k(x)dx = \int_0^1 F(x) \le 4,$$

άτοπο. Επομένως, υπάρχει τουλάχιστον ένα $x \in (0, 1)$ που ανήκει σε τουλάχιστον 5 από τα διαστήματα I_k.

(β) Ας υποθέσουμε ότι $\sum_{i=1}^{\infty} |S_i| = w$. Θεωρούμε την τομή της ένωσης των ταινιών με έναν κυκλικό δίσκο ακτίνας R. Το εμβαδό της τομής κάθε ταινίας S_i με το δίσκο είναι μικρότερο από $2R|S_i|$ και συνεπώς το εμβαδό της τομής του $\cup_{i=1}^{\infty} S_i$ με το δίσκο είναι μικρότερο του $2R \sum_{i=1}^{\infty} |S_i| < 2Rw$. Επιλέγοντας ακτίνα $R > 2w/\pi$, έχουμε ότι το εμβαδό του δίσκου είναι $\pi R^2 > 2Rw$ και άρα μεγαλύτερο του εμβαδού της τομής του $\cup_{i=1}^{\infty} S_i$ με το δίσκο. Επομένως υπάρχουν σημεία του δίσκου που δεν ανήκουν σε καμία από τις $(S_i)_{i=1,2,\ldots}$.

2. Δίνεται η ακολουθία $(a_n)_{n=0,1,\ldots}$ με

$$a_n = \sum_{k=0}^{6^n} (-1)^k \binom{6^n - k}{k}, \ n = 0, 1, \ldots.$$

Να υπολογιστεί (σε όσο το δυνατόν απλούστερη μορφή) το a_{2013}.

Λύση: Το άθροισμα $\sum_{k=0}^{6^n} (-1)^k \binom{6^n-k}{k}$ εξαρτάται από το n μέσω του $m = 6^n$. Θα υπολογίσουμε το γενικότερο άθροισμα

$$b_m = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m - k}{k}, \ m = 0, 1, 2, \ldots.$$

Θεωρούμε τη γεννήτρια της ακολουθίας $B(t)=\sum_{m=0}^{\infty} b_m t^m$. Έχουμε:

$$\begin{aligned} B(t) &= \sum_{m=0}^{\infty} b_m t^m = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{m}(-1)^k \binom{m-k}{k} t^m \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \sum_{m=k}^{\infty}\binom{m-k}{k} t^m = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \sum_{r=0}^{\infty}\binom{r}{k} t^{r+k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}(-t)^k \sum_{r=0}^{\infty}\binom{r}{k} t^r = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-t)^k}{k!}\sum_{r=0}^{\infty} r(r-1)\cdots(r-k+1)t^r. \end{aligned}$$

Όμως, παραγωγίζοντας k φορές τη σειρά $\sum_{r=0}^{\infty} t^r=(1-t)^{-1}$, έχουμε

$$\sum_{r=0}^{\infty} r(r-1)\cdots(r-k+1)t^{r-k} = k!(1-t)^{-(k+1)}.$$

Επομένως, τελικά έχουμε

$$\begin{aligned} B(t) &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-t^2)^k}{(1-t)^{k+1}} = \frac{1}{1-t}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{-t^2}{1-t}\right)^k = \frac{1}{1-t}\cdot\frac{1}{1+\frac{t^2}{1-t}} \\ &= \frac{1}{1-t+t^2} = \frac{1+t}{1+t^3} = \frac{1}{1+t^3} + t\frac{1}{1+t^3} \\ &= \sum_{h=0}^{\infty}(-1)^h t^{3h} + \sum_{h=0}^{\infty}(-1)^h t^{3h+1}. \end{aligned}$$

Συνεπώς $b_m=(-1)^h$, όταν $m=3h$ ή $m=3h+1$, ενώ $b_m=0$, όταν $m=3h+2$, $h=0,1,2,\ldots$. Άρα $a_{2013}=b_{6^{2013}}=1$.

3. Δίνεται αντιστρέψιμος $n\times n$ πίνακας A με τις εξής ιδιότητες:
(α) Κάθε στοιχείο του A ανήκει στο σύνολο $\{-1,0,1,i,-i\}$.
(β) Κάθε γραμμή του A περιέχει ακριβώς ένα μη μηδενικό στοιχείο.
Δείξτε ότι υπάρχει φυσικός αριθμός k τέτοιος ώστε $A^*=A^k$.

Λύση: Έστω G το σύνολο όλων των αντιστρέψιμων $n\times n$ πινάκων με τις ιδιότητες (α) και (β). Παρατηρούμε ότι το σύνολο G είναι κλειστό ως προς τον πολλαπλασιασμό και πεπερασμένο. Πραγματικά βλέπουμε εύκολα ότι $X,Y\in G$ συνεπάγεται $XY\in G$. Επίσης, ένας πίνακας του G φτιάχνεται σε 2 στάδια. Επιλέγουμε τις θέσεις των γραμμών που έχουν το μη-μηδενικό στοιχείο με $n!$ τρόπους και κατόπιν επιλέγουμε ποιό στοιχείο θα μπει σε κάθε θέση από τα $-1,1,i,-i$ με 4^n τρόπους. Συνεπώς το G έχει ακριβώς $n!4^n$ στοιχεία. Αφού $A\in G$, από τα (α) και (β) προκύπτει ότι υπάρχουν φυσικοί αριθμοί $s<t$ με $A^s=A^t$. Επομένως για $m=t-s$ ισχύει $A^m=I_n$. Από την άλλη μεριά οι γραμμές του A είναι προφανώς ορθογώνιες ανά δύο (ο A είναι ορθομοναδιαίος) οπότε $A^*A=I_n$. Επομένως $A^*=A^{-1}=A^{m-1}$.

4. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|\,dx<+\infty.$$

Να υπολογιστεί το

$$\lim_{t\to+\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|f(x+t)-f(x)|\,dx.$$

Λύση: Προφανώς ισχύει

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x+t) - f(x)|\, dx \le 2 \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx$$

για κάθε t. Από την άλλη πλευρά,

$$\begin{aligned}
2 \int_{-\infty}^{\infty} |f(x+t) - f(x)|\, dx &\ge \int_{-\infty}^{\infty} \big(|f(x+t)| + |f(x)| - 2\min\{|f(x+t)|, |f(x)|\}\, dx \\
&= 2 \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx - 2 \int_{-\infty}^{\infty} \min\{|f(x+t)|, |f(x)|\}\, dx \\
&\ge 2 \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx - 2 \int_{-\infty}^{-t/2} |f(x)|\, dx - 2 \int_{-t/2}^{\infty} |f(x+t)|\, dx \\
&= 2 \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx - 2 \int_{-\infty}^{-t/2} |f(x)|\, dx - 2 \int_{t/2}^{\infty} |f(x)|\, dx,
\end{aligned}$$

το οποίο συγκλίνει στο $2\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx$ καθώς το $t \to +\infty$, διότι

$$\lim_{t\to+\infty} \int_{-\infty}^{-t/2} |f(x)|\, dx = \lim_{t\to+\infty} \int_{t/2}^{\infty} |f(x)|\, dx = 0.$$