Προβλήματα για το διαγωνισμό επιλογής της ΕΜΕ για τη Μαθηματική Ολυμπιάδα πρωτοετών και δευτεροετών φοιτητών

4 Φεβρουαρίου 2012

Πρόβλημα 1:

(α) Υπολογίστε το όριο

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^4}\left(\prod_{k=1}^{2n}(n^2+k^2)\right)^{1/n}.$$

(β) Να αποφανθείτε αν είναι αληθής ή ψευδής η παρακάτω πρόταση: Αν (a_n) και (b_n) είναι ακολουθίες θετικών πραγματικών αριθμών $(n = 1, 2, \ldots)$ και

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b_n} = \infty,$$

τότε

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n + b_n} = \infty.$$

Πρόβλημα 2: Να δείξετε ότι δοθέντων πέντε σημείων στο επίπεδο, τα οποία ανά τρία είναι μη συνευθειακά, μπορούμε πάντοτε να επιλέξουμε μία τριάδα A, B, C από αυτά, έτσι ώστε η γωνία $A\hat{B}C$ να είναι αμβλεία.

Πρόβλημα 3: Συμβολίζουμε με $\mathbb{R}^{n\times n}$ το σύνολο των $n \times n$ πινάκων με στοιχεία πραγματικούς αριθμούς.

(α) Αν $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, δείξτε ότι υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n+1}$, όχι όλοι μηδέν, τέτοιοι ώστε $\det(\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \cdots + \lambda_{n+1} A_{n+1}) = 0$.

(β) Δείξτε ότι υπάρχουν πίνακες $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ με την εξής ιδιότητα: αν λ_1, λ_2 είναι τυχαίοι πραγματικοί αριθμοί, όχι και οι δύο μηδέν, τότε $\det(\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2) \neq 0$.

(γ) Δείξτε ότι υπάρχουν πίνακες $A_1, A_2, A_3, A_4 \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ με την εξής ιδιότητα: αν $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ είναι τυχαίοι πραγματικοί αριθμοί, όχι όλοι μηδέν, τότε $\det(\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3 + \lambda_4 A_4) \neq 0$.

Πρόβλημα 4: Θέτουμε $X_n = \{1, -1, 2, -2, \ldots, n, -n\}$ και θεωρούμε το σύνολο Ω_n των αμφιμονοσήμαντων απεικονίσεων $\sigma : X_n \to X_n$ που έχουν την ιδιότητα $\sigma(-i) = -\sigma(i)$ για $1 \le i \le n$. Επιλέγουμε τυχαία και ομοιόμορφα ένα στοιχείο σ του Ω_n. Υπολογίστε το όριο $\lim_{n\to\infty} p(n)$, όπου $p(n)$ είναι η πιθανότητα να ισχύει $\sigma(i) \neq i$ για $1 \le i \le n$.

Πρόβλημα 5: Να εξετάσετε αν υπάρχει παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$, τέτοια ώστε να ισχύει $f'(x) \ge f(x + f(x))$ για κάθε $x > 0$.

Η διάρκεια της εξέτασης είναι 3 ώρες. **ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!**