Διαγωνισμός επιλογής της ΕΜΕ για την Μαθηματική Ολυμπιάδα πρωτοετών και δευτεροετών φοιτητών 29 Ιανουαρίου 2011

1. Δίνονται οι $n \times n$ πίνακες A, B που ικανοποιούν $AB + A + B = 0$. Να εκφραστεί το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A συναρτήσει του χαρακτηριστικού πολυωνύμου του B και της τιμής $\det(I + A)$.

2. Έστω $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, 2 φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση τέτοια ώστε

$$f(0) = f(1) = 0, f'(0) > 0,$$

η οποία επιπρόσθετα ικανοποιεί τη συνθήκη

$$(*) \quad \left(2\frac{f(x)}{x} - f'(x)\right)\left(2\frac{f(y)}{y} - f'(y)\right) > \left(\frac{f(x)}{x} + \frac{f(y)}{y} - f'(y)\right)^2, \quad \forall\ 0 < y < x < 1.$$

(α) Αποδείξτε ότι

$$f''(x) \leq 0, \quad \forall\ 0 < x < 1,$$

και μάλιστα δεν υπάρχει διάστημα $(\alpha, \beta) \subseteq [0, 1]$ ώστε $f''(x) = 0, \quad \forall\ \alpha < x < \beta$.
(β) Βρείτε γνήσια κοίλη συνάρτηση f, που να μην ικανοποιεί την συνθήκη $(*)$.

3. Έστω

$$\mathcal{A} = \{u \in C[0, 1], \quad u(0) = 1,\ u(1) = 0\},$$

που είναι τμηματικά C^1 και θεωρούμε το πρόβλημα

$$\kappa_\alpha = \inf\{\int_0^1 x^\alpha (u'(x))^2 dx, \quad u \in \mathcal{A}\}.$$

(α) Εάν $0 < \alpha < 1$, αποδείξτε ότι $\kappa_\alpha = 1 - \alpha$ και υπάρχει συνάρτηση $u \in \mathcal{A}$ τέτοια ώστε

$$1 - \alpha = \int_0^1 x^\alpha (u'(x))^2 dx.$$

(β) Εάν $\alpha > 1$ αποδείξτε ότι $\kappa_\alpha = 0$, και δεν υπάρχει συνάρτηση $u \in \mathcal{A}$ τέτοια ώστε

$$0 = \int_0^1 x^\alpha (u'(x))^2 dx.$$

Υπόδειξη Για $u, v \in \mathcal{A}$ ισχύει

$$(u'(x))^2 \geq (v'(x))^2 + 2v'(x)(u'(x) - v'(x)).$$

4. Έστω το σύνολο $X = \{1, 2, \ldots, n\}$. Μια οικογένεια υποσυνόλων $\{X_1, X_2, \ldots, X_r\}$ του X θα λέγεται συνεκτική οικογένεια του X, αν

- τα σύνολα $X_1, X_2, \ldots, X_r$ είναι διακεκριμένα
- τα σύνολα $X_1, X_2, \ldots, X_r$ έχουν ανά δύο μή κενή τομή.

Να βρείτε το μέγιστο αριθμό υποσυνόλων $r_{\max}$ που μπορεί να έχει μια συνεκτική οικογένεια του X.

5. Έστω ένας p πρώτος αριθμός και a, b φυσικοί με $a > b$. Τους a, b τους γράφουμε στην μορφή $a = a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + a_3 p^3 + \cdots + a_r p^r$, και $b = b_0 + b_1 p + b_2 p^2 + b_3 p^3 + \cdots + b_s p^s$ όπου τα $0 \leq a_i, b_i < p$. Δείξτε ότι

$$\binom{a}{b} \equiv \prod_{i=1}^{r} \binom{a_i}{b_i} \mod p.$$

Δείξτε ότι $\binom{a}{b} \not\equiv 0 \mod p$ αν και μόνο αν $a_i \geq b_i$ για κάθε i.