Προβλήματα για το διαγωνισμό επιλογής της ΕΜΕ
για τη Μαθηματική Ολυμπιάδα πρωτοετών και δευτεροετών φοιτητών
15 Φεβρουαρίου 2009

Πρόβλημα 1: Να υπολογιστεί το όριο

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^1 + 2^2 + 3^3 + \cdots + n^n}{n^n}.$$

Πρόβλημα 2: Έστω $\pi : \{1, 2, 3, \ldots\} \to \{1, 2, 3, \ldots\}$ μια 1-1 και επί συνάρτηση. Να αποδειχθεί ότι η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi(n)}{n^2}$$

αποκλίνει.

Πρόβλημα 3: Να υπολογιστούν τα όρια

$$\lim_{n\to\infty} n!\,\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \frac{3}{2} & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \frac{4}{3} & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & \frac{n+1}{n} \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \lim_{n\to\infty} (n-2)!\,\det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \frac{3}{2} & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \frac{4}{3} & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & \frac{n+1}{n} \end{pmatrix}.$$

Πρόβλημα 4: Έστω $w = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ μια μετάθεση του συνόλου $\{1, 2, \ldots, n\}$. Κάθοδος της w λέγεται κάθε δείκτης $i \in \{1, 2, \ldots n-1\}$ για τον οποίο ισχύει $a_i > a_{i+1}$. Για παράδειγμα, για $n = 9$ η μετάθεση $(1, 4, 2, 5, 6, 8, 9, 7, 3)$ έχει τρεις καθόδους, τις $i = 2, 7, 8$. Να βρεθεί το πλήθος των μεταθέσεων του συνόλου $\{1, 2, \ldots, n\}$ που έχουν ακριβώς μία κάθοδο.

Πρόβλημα 5: Έστω θετικοί ακέραιοι n και α. Αν ο n διαιρεί το $(\alpha - 1)^{2009}$, να αποδειχθεί ότι ο n διαιρεί το $1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^{n-1}$.

Η διάρκεια της εξέτασης είναι 3 ώρες. **ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!**

Λύσεις

Πρόβλημα 1: Παρατηρούμε ότι για $n \ge 2$ ισχύει

$$1 \ \le \ \frac{1^1 + 2^2 + \cdots + n^n}{n^n} \ \le \ \frac{n^1 + n^2 + \cdots + n^n}{n^n} \ = \ \frac{n^n - 1}{n^{n-1}(n-1)} \ = \ \frac{1 - 1/n^n}{1 - 1/n}$$

και ότι

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 - 1/n^n}{1 - 1/n} \ = \ 1.$$

Έπεται ότι το ζητούμενο όριο είναι επίσης ίσο με 1.

Πρόβλημα 2: Αφού η αρμονική σειρά αποκλίνει, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{\pi(n)}{n^2} \ \ge \ 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{N}$$

για κάθε $N \ge 1$. Θέτουμε $b_n = 1/n^2$ για $n \ge 1$, οπότε $b_1 \ge b_2 \ge \cdots \ge 0$. Αφού για κάθε $n \ge 1$ οι $\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(n)$ είναι διακεκριμένοι θετικοί ακέραιοι, ισχύει

$$\pi(1) + \pi(2) + \cdots + \pi(n) \ \ge \ 1 + 2 + \cdots + n.$$

Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_N b_N \ = \ \sum_{n=1}^{N} (a_1 + \cdots + a_n)(b_n - b_{n+1}) \ + \ (a_1 + \cdots + a_N)\, b_{N+1}$$

δύο φορές, μία με $a_n = \pi(n)$ για κάθε n και μία με $a_n = n$ για κάθε n, προκύπτει ότι

$$\pi(1) \cdot b_1 + \pi(2) \cdot b_2 + \cdots + \pi(N) \cdot b_N \ \ge \ 1 \cdot b_1 + 2 \cdot b_2 + \cdots + N \cdot b_N,$$

δηλαδή το ζητούμενο.

Πρόβλημα 3: Για την πρώτη περίπτωση, αφαιρώντας την πρώτη γραμμή από καθεμιά από τις υπόλοιπες μετατρέπει τον πίνακα που δίνεται σε άνω τριγωνικό, με στοιχεία στην κύρια διαγώνιο ίσα με $1, 1/2, \ldots, 1/n$. Αφού η πράξη αυτή δε μεταβάλλει την ορίζουσα του πίνακα, αυτή είναι ίση με $1/n!$ και συνεπώς το ζητούμενο όριο είναι ίσο με 1.

Για τη δεύτερη περίπτωση υπάρχουν διάφοροι τρόποι για να δείξει κανείς ότι η ορίζουσα του πίνακα, έστω A_n, που δίνεται είναι ίση με $(n^2 + n + 2)/2n!$ και συνεπώς ότι το ζητούμενο όριο είναι ίσο με $1/2$. Για παράδειγμα, αφαιρώντας την τελευταία στήλη του A_n από καθεμιά από τις υπόλοιπες προκύπτει ο πίνακας

$$B_n \ = \ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 1/2 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1/3 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1/n & -1/n & -1/n & \cdots & 1 + 1/n \end{pmatrix}.$$

Αφαιρώντας i φορές τη στήλη i, για κάθε $1 \le i \le n-1$, από την τελευταία στήλη του B_n προκύπτει κάτω τριγωνικός πίνακας, η ορίζουσα του οποίου είναι ίση με

$$\frac{1}{(n-1)!} \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1 + 2 + \cdots + (n-1)}{n} \right),$$

δηλαδή με $(n^2+n+2)/2n!$. Ένας άλλος τρόπος είναι ο εξής: Παρατηρούμε ότι $A_n = \Delta_n + J_n$, όπου Δ_n είναι ο διαγώνιος $n \times n$ πίνακας με στοιχεία στην κύρια διαγώνιο ίσα με $1, 1/2, \ldots, 1/n$ και J_n είναι ο $n \times n$ πίνακας κάθε στοιχείο του οποίου είναι ίσο με 1. Σύμφωνα με γνωστή πρόταση, η ορίζουσα του A_n είναι ίση με το άθροισμα των οριζουσών των 2^n πινάκων που προκύπτουν αντικαθιστώντας οποιοδήποτε σύνολο στηλών του Δ_n με τις αντίστοιχες στήλες του J_n. Ο υπολογισμός του αθροίσματος είναι εύκολος αφού οι στήλες του J_n είναι όλες ίσες μεταξύ τους και συνεπώς η ορίζουσα κάθε πίνακα που προκύπτει αντικαθιστώντας δύο ή περισσότερες στήλες του Δ_n με τις αντίστοιχες στήλες του J_n είναι ίση με μηδέν.

Πρόβλημα 4: Έστω A_n το σύνολο των μεταθέσεων του $\{1, 2, \ldots, n\}$ οι οποίες έχουν ακριβώς μία κάθοδο και έστω B_n το σύνολο των υποσυνόλων του $\{1, 2, \ldots, n\}$. Παρατηρούμε ότι μια μετάθεση $w = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ του $\{1, 2, \ldots, n\}$ ανήκει στο A_n αν και μόνο αν για κάποιο (μοναδικό) $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ ισχύει $a_1 < \cdots < a_k > a_{k+1} < \cdots < a_n$. Θέτουμε $\phi(w) = \{a_1, \ldots, a_k\}$, οπότε προκύπτει μια απεικόνιση $\phi : A_n \to B_n$. Για παράδειγμα, αν $n = 9$ και $w = (3, 5, 6, 8, 1, 2, 4, 7, 9)$, τότε $\phi(w) = \{3, 5, 6, 8\}$.

Παρατηρούμε ότι για κάθε υποσύνολο S του $\{1, 2, \ldots, n\}$ υπάρχει το πολύ μία μετάθεση $w \in A_n$ με $\phi(w) = S$, αφού σε κάθε τέτοια μετάθεση πρέπει πρώτα να εμφανίζονται τα στοιχεία του S σε αύξουσα σειρά και έπειτα τα στοιχεία του συμπληρώματος $\{1, 2, \ldots, n\} \setminus S$ του S επίσης σε αύξουσα σειρά. Με άλλα λόγια, η απεικόνιση ϕ είναι 1–1. Ποια είναι η εικόνα της ϕ; Ο προηγούμενος συλλογισμός μας δείχνει ότι για δοσμένο υποσύνολο S του $\{1, 2, \ldots, n\}$, υπάρχει μετάθεση $w \in A_n$ με $\phi(w) = S$ αν και μόνο αν το S είναι μη κενό, $S \neq \{1, 2, \ldots, n\}$ και το μέγιστο στοιχείο του S είναι μικρότερο από το ελάχιστο στοιχείο του $\{1, 2, \ldots, n\} \setminus S$. Αυτό συμβαίνει αν και μόνο αν το S δεν είναι ένα από τα σύνολα $\varnothing, \{1\}, \{1, 2\}, \ldots, \{1, 2, \ldots, n\}$.

Από τα προηγούμενα συμπεραίνουμε ότι η ϕ ορίζει μια 1–1 και επί απεικόνιση από το A_n στο σύνολο C_n των υποσυνόλων του $\{1, 2, \ldots, n\}$ που είναι διάφορα των $\varnothing, \{1\}, \{1, 2\}, \ldots, \{1, 2, \ldots, n\}$. Επομένως, το ζητούμενο πλήθος των στοιχείων του A_n είναι ίσο με το πλήθος των στοιχείων του C_n, δηλαδή με $2^n - n - 1$.

Πρόβλημα 5: Έστω p πρώτος αριθμός και p^r μια δύναμη του p που διαιρεί το n. Θα δείξουμε ότι το p^r διαιρεί επίσης το $1 + \alpha + \cdots + \alpha^{n-1}$. Πράγματι, αφού το n διαιρεί το $(\alpha - 1)^{2009}$, ο πρώτος p διαιρεί το $(\alpha-1)^{2009}$ και συνεπώς διαιρεί επίσης το $\alpha - 1$, δηλαδή ισχύει $\alpha \equiv 1 \pmod{p}$. Γράφοντας $n = p^r m$ για κάποιο θετικό ακέραιο m και θέτοντας $\beta = \alpha^m$, έχουμε

$$\begin{aligned} 1 + \alpha + \cdots + \alpha^{n-1} &= \frac{\alpha^n - 1}{\alpha - 1} = \frac{\alpha^m - 1}{\alpha - 1}\, \frac{\alpha^n - 1}{\alpha^m - 1} = \frac{\alpha^m - 1}{\alpha - 1}\, \frac{\alpha^{p^r m} - 1}{\alpha^m - 1} \\ &= \frac{\alpha^m - 1}{\alpha - 1}\, \frac{\beta^{p^r} - 1}{\beta - 1} = \frac{\alpha^m - 1}{\alpha - 1} \prod_{i=1}^{r} \frac{\beta^{p^i} - 1}{\beta^{p^{i-1}} - 1} \\ &= \frac{\alpha^m - 1}{\alpha - 1} \prod_{i=1}^{r} \left(1 + \beta^{p^{i-1}} + \beta^{2p^{i-1}} + \cdots + \beta^{(p-1)p^{i-1}}\right). \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι καθένας από τους όρους του γινομένου στον τύπο στον οποίο καταλήξαμε διαιρείται με το p, αφού $\beta = \alpha^m \equiv 1 \pmod{p}$ και συνεπώς

$$1 + \beta^{p^{i-1}} + \beta^{2p^{i-1}} + \cdots + \beta^{(p-1)p^{i-1}} \;\equiv\; 1 + 1 + \cdots + 1 \;=\; p \;\equiv\; 0 \pmod{p}$$

για κάθε $1 \le i \le p$. Συμπεραίνουμε ότι το $1 + \alpha + \cdots + \alpha^{n-1}$ διαιρείται με το p^r.

Έστω τώρα $n = p_1^{r_1} \cdots p_k^{r_k}$ η ανάλυση του n σε γινόμενο δυνάμεων διακεκριμένων πρώτων $p_1, \ldots, p_k$. Δείξαμε ότι το $1 + \alpha + \cdots + \alpha^{n-1}$ διαιρείται με καθέναν από τους ακεραίους $p_i^{r_i}$. Αφού αυτοί είναι ανά δύο σχετικώς πρώτοι, το $1 + \alpha + \cdots + \alpha^{n-1}$ διαιρείται επίσης με το γινόμενό τους, δηλαδή με το n.