Προβλήματα για το διαγωνισμό επιλογής της ΕΜΕ
για τη Μαθηματική Ολυμπιάδα πρωτοετών και δευτεροετών φοιτητών
15 Φεβρουαρίου 2009

Πρόβλημα 1: Να υπολογιστεί το όριο

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^1 + 2^2 + 3^3 + \cdots + n^n}{n^n}.$$

Πρόβλημα 2: Έστω $\pi : \{1, 2, 3, \ldots\} \to \{1, 2, 3, \ldots\}$ μια 1-1 και επί συνάρτηση. Να αποδειχθεί ότι η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi(n)}{n^2}$$

αποκλίνει.

Πρόβλημα 3: Να υπολογιστούν τα όρια

$$\lim_{n\to\infty} n! \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \frac{3}{2} & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \frac{4}{3} & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & \frac{n+1}{n} \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \lim_{n\to\infty} (n-2)! \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \frac{3}{2} & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \frac{4}{3} & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & \frac{n+1}{n} \end{pmatrix}.$$

Πρόβλημα 4: Έστω $w = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ μια μετάθεση του συνόλου $\{1, 2, \ldots, n\}$. Κάθοδος της w λέγεται κάθε δείκτης $i \in \{1, 2, \ldots n-1\}$ για τον οποίο ισχύει $a_i > a_{i+1}$. Για παράδειγμα, για $n = 9$ η μετάθεση $(1, 4, 2, 5, 6, 8, 9, 7, 3)$ έχει τρεις καθόδους, τις $i = 2, 7, 8$. Να βρεθεί το πλήθος των μεταθέσεων του συνόλου $\{1, 2, \ldots, n\}$ που έχουν ακριβώς μία κάθοδο.

Πρόβλημα 5: Έστω θετικοί ακέραιοι n και α. Αν ο n διαιρεί το $(\alpha - 1)^{2009}$, να αποδειχθεί ότι ο n διαιρεί το $1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^{n-1}$.

Η διάρκεια της εξέτασης είναι 3 ώρες. **ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!**