Προβλήματα για το διαγωνισμό επιλογής της ΕΜΕ
για τη Μαθηματική Ολυμπιάδα πρωτοετών και δευτεροετών φοιτητών
23 Φεβρουαρίου 2008

Πρόβλημα 1: (α) Δίνεται ένα σύνολο X και 2008 12-μελή υποσύνολά του, τα $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{2008}$. Αποδείξτε ότι μπορούμε να χρωματίσουμε κάποια από τα στοιχεία του X άσπρα και τα υπόλοιπα μαύρα, έτσι ώστε όλα τα υποσύνολα $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{2008}$ να μην είναι μονοχρωματικά (δηλαδή κάθε υποσύνολο από τα $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{2008}$ να περιέχει τουλάχιστον 1 άσπρο στοιχείο και τουλάχιστον 1 μαύρο στοιχείο).

(β) Αποδείξτε ότι μπορούμε να χρωματίσουμε κάποια από τα στοιχεία του $Y = \{1, 2, \ldots, 2008\}$ άσπρα και τα υπόλοιπα μαύρα, ώστε το πλήθος των μονοχρωματικών 11-μελών υποσυνόλων του Y να είναι το πολύ $\binom{2008}{11}2^{-10}$.

Λύση: (α) Έστω ότι το X περιέχει x στοιχεία. Τότε το σύνολο Ω των δυνατών χρωματισμών του X με τα δυο χρώματα έχει πληθάριθμο $N(\Omega) = 2^x$. Το σύνολο E_i των χρωματισμών του X που το υποσύνολο Y_i είναι μονοχρωματικό έχει πληθάριθμο $N(E_i) = 2^{x-11}$ (χρωματίζουμε τα 12 στοιχεία του E_i όλα άσπρα ή μαύρα (2 τρόποι) και τα υπόλοιπα $x - 12$ στοιχεία του X όπως θέλουμε (2^{x-12} τρόποι) οπότε συνολικά, από πολλαπλασιαστική αρχή, έχουμε 2^{x-11} χρωματισμούς του X για τους οποίους το Y_i είναι μονοχρωματικό).

Για να αποδειχθεί το ζητούμενο αρκεί να αποδείξουμε ότι $E_1^c \cap E_2^c \cap \cdots \cap E_{2008}^c \neq \emptyset$. Για τον πληθάριθμο όμως του $E_1^c \cap E_2^c \cap \cdots \cap E_{2008}^c$ έχουμε

$$\begin{aligned}
N(E_1^c \cap E_2^c \cap \cdots \cap E_{2008}^c) &= N(\Omega) - N(E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_{2008}) \\
&= 2^x - N(E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_{2008}) \\
&\geq 2^x - \sum_{i=1}^{2008} N(E_i) = 2^x - 2008 \cdot 2^{x-11} \\
&= 2^{x-11}(2^{11} - 2008) = 2^{x-11} \cdot 40 > 0.
\end{aligned}$$

(β) Χρωματίζουμε τα στοιχεία του $Y = \{1, 2, \ldots, 2008\}$ άσπρα ή μαύρα εντελώς τυχαία (δηλαδή με πιθανότητα $1/2$ έκαστο). Έστω W η τυχαία μεταβλητή που αντιστοιχεί στο πλήθος των μονοχρωματικών 11-μελών υποσυνόλων του Y μετά από έναν τέτοιο χρωματισμό. Η πιθανότητα ένας χρωματισμός του Y να χρωματίσει άσπρα ακριβώς k στοιχεία του Y (και επομένως να χρωματίσει μαύρα ακριβώς $2008 - k$ στοιχεία του Y) είναι $\binom{2008}{k}2^{-2008}$. Στην περίπτωση αυτή θα προκύψουν $\binom{k}{11}$ μονοχρωματικά-άσπρα υποσύνολα του Y και $\binom{2008-k}{11}$ μονοχρωματικά-μαύρα υποσύνολα του Y. Επομένως η μέση τιμή της W είναι

$$\begin{aligned}
E[W] &= \sum_{k=11}^{2008} \binom{k}{11}\binom{2008}{k}2^{-2008} + \sum_{k=0}^{1997} \binom{2008-k}{11}\binom{2008}{k}2^{-2008} \\
&= \sum_{k=11}^{2008} \binom{2008}{11}\binom{1997}{k-11}2^{-2008} + \sum_{k=0}^{1997} \binom{2008}{11}\binom{1997}{k}2^{-2008} \\
&= 2\binom{2008}{11}2^{-11} = \binom{2008}{11}2^{-10}.
\end{aligned}$$

Από την ανισότητα Markov έχουμε

$$\Pr\left[W > \binom{2008}{11}2^{-10}\right] < \frac{E[W]}{\binom{2008}{11}2^{-10}} = 1$$

και επομένως $\Pr\left[W \leq \binom{2008}{11}2^{-10}\right] > 0$. Αφού αυτή η πιθανότητα είναι θετική συμπεραίνουμε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένας χρωματισμός ώστε το πλήθος των μονοχρωματικών 11-μελών υποσυνόλων του Y να είναι το πολύ $\binom{2008}{11}2^{-10}$.

Πρόβλημα 2: Έστω A, B δυο πεπερασμένα ισοπληθικά υποσύνολα του $\mathbb{Z}^2$ και $T \subseteq \mathbb{Z}^2$ τέτοια ώστε

- Τα σύνολα $A + t$, $t \in T$, είναι ανά δύο ξένα,
- Τα σύνολα $B + t$, $t \in T$, είναι ανά δύο ξένα,
- $\mathbb{Z}^2 = \bigcup_{t \in T} A + t$.

Αποδείξτε ότι $\mathbb{Z}^2 = \bigcup_{t \in T} B + t$.

Λύση: Η υπόθεσή μας μπορεί να γραφεί ως

$$\forall x \in \mathbb{Z}^2 : \sum_{t \in T} \mathbf{1}_A(x - t) = 1,$$

και

$$\forall x \in \mathbb{Z}^2 : \sum_{t \in T} \mathbf{1}_B(x - t) \le 1.$$

Έχουμε:

$$\begin{aligned}
|A| &= |B| \\
&= \sum_{x \in \mathbb{Z}^2} \mathbf{1}_B(-x) \\
&= \sum_{x \in \mathbb{Z}^2} \mathbf{1}_B(-x) \sum_{t \in T} \mathbf{1}_A(x - t) \\
&= \sum_{t \in T} \sum_{x \in \mathbb{Z}^2} \mathbf{1}_B(-x) \mathbf{1}_A(x - t) \\
&= \sum_{t \in T} \sum_{y \in \mathbb{Z}^2} \mathbf{1}_A(-y) \mathbf{1}_B(y - t) \\
&= \sum_{y \in \mathbb{Z}^2} \mathbf{1}_A(-y) \sum_{t \in T} \mathbf{1}_B(y - t) \\
&\le \sum_{y \in \mathbb{Z}^2} \mathbf{1}_A(-y) \\
&= |A|
\end{aligned}$$

Άρα ισχύουν οι ισότητες παραπάνω και συνεπώς

$$\forall y \in -A : \sum_{t \in T} \mathbf{1}_B(y - t) = 1. \tag{1}$$

Όμως η υπόθεσή μας για το σύνολο A ισχύει και για τυχούσα μεταφορά $A' = A + \tau$ του A, άρα η (1) ισχύει για κάθε $y \in \mathbb{Z}^2$.

Πρόβλημα 3: (α) Έστω $f(x)$ μονότονη πραγματική συνάρτηση ορισμένη στο $[1, +\infty)$. Αποδείξτε ότι αν το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_1^\infty \frac{f(x) - x}{x^2} dx$$

συγκλίνει, τότε

$$\lim_{x \to +\infty} f(x)/x = 1.$$

(β) Έστω $0 < a_n < 1$, $n \in \mathbb{N}$. Αποδείξτε ότι αν η σειρά

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{a_n}{\log(1/a_n)}$$

συγκλίνει, τότε και η σειρά

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{\log n}$$

συγκλίνει.

Λύση: (α) Έστω πως όχι.

Περίπτωση 1: $f(x)$ αύξουσα. Τότε υπάρχει $\epsilon > 0$ και ακολουθία (x_n) με $\lim x_n = +\infty$ τέτοια ώστε

$$\begin{aligned} &\text{(i) είτε } f(x_n)/x_n > 1+\epsilon\ ,\ \forall n \in \mathbf{N}\,, \\ &\text{(ii) είτε } f(x_n)/x_n < 1-\epsilon\ ,\ \forall n \in \mathbf{N}\,. \end{aligned}$$

Στην περίπτωση (i) έχουμε

$$\begin{aligned} \int_{x_n}^{(1+\epsilon)x_n} \frac{f(x)-x}{x^2}dx &\geq \int_{x_n}^{(1+\epsilon)x_n} \frac{f(x_n)-x}{x^2}dx \\ &\geq \int_{x_n}^{(1+\epsilon)x_n} \frac{(1+\epsilon)x_n - x}{x^2}dx \\ (y = x_n x) \quad &= \int_1^{1+\epsilon} \frac{(1+\epsilon)-y}{y^2}dy, \end{aligned}$$

που είναι θετικό και ανεξάρτητο του n. Άτοπο.

Στην περίπτωση (ii) έχουμε παρόμοια

$$\begin{aligned} \int_{(1-\epsilon)x_n}^{x_n} \frac{f(x)-x}{x^2}dx &\leq \int_{(1-\epsilon)x_n}^{x_n} \frac{f(x_n)-x}{x^2}dx \\ &\leq \int_{(1-\epsilon)x_n}^{x_n} \frac{(1-\epsilon)x_n - x}{x^2}dx \\ (y = x_n x) \quad &= \int_{1-\epsilon}^{1} \frac{(1-\epsilon)-y}{y^2}dy \\ &< 0\,, \end{aligned}$$

που είναι επίσης άτοπο.

Περίπτωση 2: $f(x)$ φθίνουσα. Διακρίνουμε περιπτώσεις (i) και (ii) όπως προηγουμένως. Στην περίπτωση (i) θεωρούμε το ολοκλήρωμα $\int_{x_n/2}^{x_n} \frac{f(x)-x}{x^2}dx$ ενώ στην περίπτωση (ii) θεωρούμε το ολοκλήρωμα $\int_{x_n}^{2x_n} \frac{f(x)-x}{x^2}dx$.

(β) Και οι δύο σειρές είναι σειρές θετικών όρων. Αν το $n \in \mathbf{N}$ είναι τέτοιο ώστε $\frac{\log(1/a_n)}{\log n} \leq 2$, τότε

$$\frac{a_n}{\log n} = \frac{a_n}{\log(1/a_n)} \times \frac{\log(1/a_n)}{\log n} \leq \frac{2a_n}{\log(1/a_n)}.$$

Αν πάλι $\frac{\log(1/a_n)}{\log n} \geq 2$ τότε $a_n \leq 1/n^2$ και άρα

$$\frac{a_n}{\log n} \leq \frac{1}{n^2 \log n}.$$

Άρα σε κάθε περίπτωση

$$\frac{a_n}{\log n} \leq \frac{2a_n}{\log(1/a_n)} + \frac{1}{n^2 \log n}.$$

Αφού η $\sum \frac{1}{n^2 \log n}$ συγκλίνει, έχουμε το ζητούμενο.