

Άσκηση 3 Υπάρχουν συνολικά n λαχεία, αριθμημένα από το 1 ως το n ($n \geq 10$). Θα γίνει κλήρωση όπου ο πρώτος λαχνός θα λάβει 100 χιλ. €, τρεις άλλοι θα λάβουν από 10 χιλ. € και έξι άλλοι από χίλια € έκαστος. Πόσες διαφορετικές κλήρωσεις υπάρχουν; $\left\{ n \cdot \binom{n-1}{3} \cdot \binom{n-4}{6} \right\}$

Άσκηση 4 Αθανάσιος Ξερινάει από το 16όγειο ενός κτιρίου με n ορόφους. Το ασανσέρ έχει μέσα k διακευριμένα (διαφορετικά) άτομα. Με πόσους τρόπους μπορούν να κατεβούν τα k αυτά άτομα στους n ορόφους; $\{ n^k \}$.

Άσκηση 5 Το ίδιο ερώτημα, μόνο που το κτήριο είναι ερχοστάσιο, και το ασανσέρ περιέχει k άτομα κοινά με υπολογιστές. $\left\{ \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right] \right\}$

Άσκηση 6 Το ίδιο ερώτημα, μόνο που τώρα πρέπει να υπολογιστούν τα άχρηστα δύο κοινά σε κάθε όροφο ($k \geq 2n$). $\left\{ \left[\begin{matrix} n \\ k-2n \end{matrix} \right] = \binom{k-n-1}{n-1} \right\}$

Άσκηση 7] Πόσοι από οι συνδυασμοί των στοιχείων του $\Omega = \{1, 2, \dots, n\}$ ανά k μπορούν να κατασκευασθούν, αν οι συνδυασμοί αυτοί δεν επιτρέπεται να περιέχουν διαδοχικούς φυσικούς;

$$\left\{ \left[\begin{matrix} k+1 \\ n-1-2(k-1) \end{matrix} \right] = \binom{n-k+1}{k}, k \leq \frac{n+1}{2} \right\}$$

Άσκηση 8] Στο Lotto υψώνονται έξι σφαιρίδια, χωρίς επανάληψη, από 49 σφαιρίδια που φέρουν τους αριθμούς 1, 2, ..., 49. Το αποτέλεσμα της υψώσεως (η νικηφια έξοδα) είναι ένας συνδυασμός των 49 ανά 6, αφού δεν ενδιαφέρει η σειρά εξαγωγής. Πόσοι από τους $\binom{49}{6}$ συνδυασμοί δεν περιέχουν διαδοχικούς αριθμούς;

$$\left\{ \text{εδώ } n=49, k=6, \binom{44}{6} \text{ όπως προηγουμένως} \right\}$$

Άσκηση 9] Ρίχνουμε ένα τάρσι k διαδοχικές φορές.

(α) Πόσα είναι όλα τα δυνατά εξαιρέτα; $\{6^k\}$

(β) Πόσα είναι εκείνα τα εξαιρέτα στο οποία σε κάθε τάρσι φέρνουμε αριθμό το χαλύττερο ή το απόλυτα προηγουμένως τάρσι;

$$\left\{ \left[\begin{matrix} 6 \\ k \end{matrix} \right] \right\}$$

3/7

Άσκηση 10 | Διαλέγουμε v σημεία, A_1, \dots, A_v , πάνω σε έναν κύκλο.

(a) Πόσες χορδές κατασκευάζονται; $\left\{ \binom{v}{2} \right\}$

(b) Πόσα διαφορετικά n -γωνα κατασκευάζονται; $\left\{ \binom{v}{k} \right\}$

Άσκηση 11 | Με πόσους τρόπους μπορούν να φρον

k κορίτσια και v αγόρια σε μια σειρά έτσι ώστε να μην υπάρχουν δύο κορίτσια δίπλα-δίπλα; $\left\{ v! \cdot (v+1)_k \right\}$

Αν πρέπει να υπάρχουν δύο κορίτσια που υπάρχουν δίπλα-δίπλα; $\left\{ (v+k)! - v! \cdot (v+1)_k \right\}$

Άσκηση 12 | Ένα πρόβλημα κατασκευάζεται

έχοντας δύο αριθμούς από 1 έως v (όχι μετ' ανάγκη διαφορετικούς) στα δύο στελέχη του.

Πόσα πρόβλημα μπορούν να κατασκευαστούν; $\left\{ \left[\frac{v}{2} \right] \right\}$

Άσκηση 13 | Πόσες λύσεις (x_1, x_2, \dots, x_5)

με $x_i \in \{0, 1, \dots\}$ έχει το σύστημα εξισώσεων

$$\left(\sum \right) \quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10, \quad x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 17;$$

$$\left\{ \left[\frac{4}{10} \right] = 286 \right\}$$

Άσκηση 14 Σε μία πολυωνομική υασιωνών v ανδρών, τα $(a_1, r_1), \dots, (a_n, r_n)$. Θέλουν να ορίσουν ένα k -μέλές συμβούλιο (από τα $2v$ άτομα). Πόσα τέτοια συμβούλια υπάρχουν

(α) χωρίς περιορισμούς; $\left\{ \binom{2v}{k} \right\}$

(β) αν πρέπει να υπάρχουν ακριβώς j γυναίκες στο συμβούλιο; $\left\{ \binom{v}{j} \binom{v}{k-j} \right\}$

(γ) αν πρέπει να υπάρχουν ακριβώς j γυναίκες, οι άνδρες των οποίων δεν επιτρέπεται να τρέχουν; $(v \geq k) \left\{ \binom{v}{j} \binom{v-j}{k-j} \right\}$

(δ) αν δεν επιτρέπεται να περιλαμβάνονται στο συμβούλιο και τα δύο μέλη υασιωνών ανδρών; $(v \geq k) \left\{ \sum_{j=0}^k \binom{v}{j} \binom{v-j}{k-j} = \binom{v}{k} \cdot 2^k \right\}$

Άσκηση 15 Πόσοι τετραψήφιοι αριθμοί είναι περιττοί και έχουν διαφορετικά ψηφία; Πόσοι είναι άρτιοι με διαφ. ψηφία; $\left\{ 5 \cdot 4 \cdot (8)_2 \right\}$
 $\left\{ 9 \cdot (9)_3 - 5 \cdot 4 \cdot (8)_2 \right\}$

Άσκηση 16 | Τοποθετώτε κ όμοια σφαιρίδια σε n διαφορετικά δοχεία, άπειρη χωρητικότητα.

Με πόσους τρόπους γίνεται η τοποθέτηση

(α) χωρίς περιορισμό; $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$

(β) αν κανένα δοχείο δεν πρέπει να
είναι άδειο; ($k \geq n$) $\left\{ \begin{matrix} k-1 \\ n-1 \end{matrix} \right\}$

(γ) αν καθένας ένα δοχείο πρέπει
να είναι άδειο; $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} k-1 \\ n-1 \end{matrix} \right\}$

Άσκηση 17 | Με πόσους τρόπους μπορούμε να

θάψουμε τους αριθμούς $1, 2, \dots, n$ σε μία σειρά

(α) χωρίς περιορισμό; $\{n!\}$

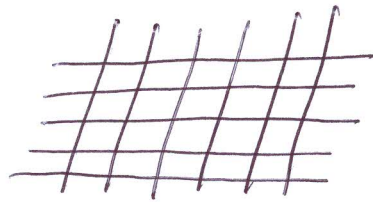
(β) αν πρέπει το 3 να βρίσκεται πριν
το 5; $\{n!/2\}$

(γ) αν πρέπει το 3 να βρίσκεται πριν
το 5 και το 5 πριν το 7; $\{n!/6\}$

(δ) αν πρέπει και το 3 και το 5
να βρίσκονται πριν το 7; $\{n!/3\}$

Άσκηση 18 | Αν ρίξουμε k βόλια Σάρια, πόσα είναι όλα τα δυνατά αποτελέσματα; $\left\{ \binom{6}{k} \right\}$

Άσκηση 19 | Φέρνουμε 6 παράλληλες ευθείες και στη συνέχεια 5 άλλες παράλληλες ευθείες που τέμνουν τις προηγούμενες.



Πόσα διαφορετικά παραλληλόγραμμα σχηματίζονται; (εννοείται τε πλευρές πάνω στις ευθείες αυτές).

$$\left\{ \frac{30 \cdot 20}{4} = \binom{6}{2} \cdot \binom{5}{2} = 150 \right\}$$

Άσκηση 20 | Αν συναντηθούν n άτομα, πόσες χειραφίες θα ανταλλάξουν; $\left\{ \binom{n}{2} \right\}$

Άσκηση 21 | Πόσοι πενταψήφιοι αριθμοί τριψήφων να παρασκευασθούν με τα ψηφία 1, 2, 3, 4, 5, 6; Πόσοι από αυτούς είναι άρτιοι; Πόσοι έχουν διαφορετικά ψηφία; Πόσοι είναι άρτιοι και έχουν διαφορετικά ψηφία; $\left\{ 6^5, 3 \cdot 6^4, (6)_5, 3 \cdot (5)_4 \right\}$

Αγκυρώσεις Συνδυαστικής για

Συνδυασμός - Διατάξεις - Μειωτές - Πολλαπλασιαστική αρχή

Άσκηση 1 Θεωρούμε δύο σύνολα (υποσύνολα του \mathbb{R})

$$X = \{x_1, x_2, \dots, x_k\} \quad \text{με} \quad x_1 < x_2 < \dots < x_k,$$

$$Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\} \quad \text{με} \quad y_1 < y_2 < \dots < y_n.$$

Πόσες συναρτήσεις $f: X \rightarrow Y$ μπορούμε να κατασκευάσουμε

- | | |
|--------------------------------------|-------------------------------------|
| (α) χωρίς περιορισμό; | $\{n^k\}$ |
| (β) 1-1; ($n \geq k$) | $\{(n)_k\}$ |
| (γ) γνήσια αύξουσες; ($n \geq k$) | $\left\{ \binom{n}{k} \right\}$ |
| (δ) αύξουσες; | $\{ [n \atop k] \}$ |
| (ε) αύξουσες και επί; ($n \leq k$) | $\left\{ \binom{k-1}{n-1} \right\}$ |
| (στ) 1-1 και επί; ($n = k$) | $\{n!\}$ |

Άσκηση 2 Πόσους εξαψήφιους αριθμούς μπορούμε να κατασκευάσουμε (να την αρχίζουν από "0") με άθροιστα ψηφίων

- | | |
|--|---|
| (α) 160 με 8; $\{ [6 \atop 7] = 792 \}$ | (δ) μικρότερο ή ίσο του 8; $\{ [7 \atop 7] = 1716 \}$ |
| (β) 160 με 9; $\{ [6 \atop 8] = 1287 \}$ | (ε) 160 με 10; $\{ [6 \atop 9] = 1 \}$ |