

ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ Ι, ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΣ 2013

B

Θέμα 1. Θεωρούμε δύο σύνολα $A = \{\alpha_1, \dots, \alpha_{20}\}$ και $B = \{\beta_1, \dots, \beta_{10}\}$ με 20 και 10 στοιχεία, αντίστοιχα, υποθέτουμε ότι $A \cap B = \emptyset$, και θέτουμε $\Omega = A \cup B$. Να υπολογίσετε

(α) τον αριθμό των υποσυνόλων του Ω με ακριβώς 19 στοιχεία, 12 από τα οποία ανήκουν στο A (και τα υπόλοιπα 7 στο B).

(β) τον αριθμό των υποσυνόλων του Ω που περιέχουν ακριβώς 12 στοιχεία από το A και περιττό αριθμό στοιχείων από το B .

(γ) τον αριθμό των υποσυνόλων του Ω που περιέχουν οσαδήποτε στοιχεία από το A και ακριβώς 7 από το B .

(δ) τον αριθμό των υποσυνόλων του Ω με ακριβώς 9 στοιχεία που περιέχουν τουλάχιστον ένα στοιχείο από το A και τουλάχιστον ένα στοιχείο από το B .

(ε) τον αριθμό των υποσυνόλων του Ω που περιέχουν ακριβώς 12 στοιχεία από το A και το πολύ 9 στοιχεία από το B .

Θέμα 2. (α) Να βρείτε το πλήθος των μη-αρνητικών ακεραίων λύσεων (x_1, \dots, x_9) του συστήματος εξισώσεων

$$\begin{aligned}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)(x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9) &= 12 \\ (x_1 + x_2 + x_3 + x_4) + (x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9) &= 7.\end{aligned}$$

(β) Να βρείτε το πλήθος των ακεραίων λύσεων (x_1, \dots, x_7) της εξίσωσης

$$(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)(x_1 + x_5 + x_6 + x_7) = 49$$

με τους περιορισμούς $0 \leq x_i \leq 8$, $i = 1, 2, \dots, 7$.

Θέμα 3. (α) Σε ένα αμφιθέατρο εξετάζονται ταυτόχρονα 120 διακεκριμένοι φοιτητές, οι $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{40}$ (οι οποίοι εξετάζονται σε θέματα της κατηγορίας Α), οι $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{40}$ (οι οποίοι εξετάζονται σε θέματα της κατηγορίας Β) και οι $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{40}$ (οι οποίοι εξετάζονται σε θέματα της κατηγορίας Γ). Καθένας από αυτούς παραδίδει το γραπτό του και τότε καταγράφεται το όνομά του σε μία λίστα (διατεταγμένη 120-άδα). Με πόσους τρόπους γίνεται να σχηματιστεί η λίστα αυτή έτσι ώστε στις πρώτες 12 θέσεις της λίστας να περιλαμβάνεται τουλάχιστον ένας φοιτητής από κάθε κατηγορία θεμάτων;

(β) Να υπολογίσετε τον αριθμό των επαναληπτικών διατάξεων των 10 στοιχείων του $\Omega = \{\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_9\}$ ανά 41, αν το ω_0 επιτρέπεται να εμφανίζεται το πολύ 2 φορές ενώ τα υπόλοιπα στοιχεία επιτρέπεται να εμφανίζονται 0 ή 10 φορές το καθένα.

ΔΙΑΡΚΕΙΑ 2 ΩΡΕΣ. ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!