

ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ Ι, ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΣ 2013

A

Θέμα 1. Θεωρούμε δύο σύνολα $A = \{\alpha_1, \dots, \alpha_{10}\}$ και $B = \{\beta_1, \dots, \beta_{20}\}$ με 10 και 20 στοιχεία, αντίστοιχα, υποθέτουμε ότι $A \cap B = \emptyset$, και θέτουμε $\Omega = A \cup B$. Να υπολογίσετε

(α) τον αριθμό των υποσυνόλων του Ω με ακριβώς 9 στοιχεία, 5 από τα οποία ανήκουν στο A (και τα υπόλοιπα 4 στο B).

(β) τον αριθμό των υποσυνόλων του Ω που περιέχουν ακριβώς 5 στοιχεία από το A και οσαδήποτε από το B .

(γ) τον αριθμό των υποσυνόλων του Ω που περιέχουν άρτιο αριθμό στοιχείων από το A και ακριβώς 4 στοιχεία από το B .

(δ) τον αριθμό των υποσυνόλων του Ω που περιέχουν το πολύ 9 στοιχεία από το A και ακριβώς 4 στοιχεία από το B .

(ε) τον αριθμό των υποσυνόλων του Ω με ακριβώς 9 στοιχεία που περιέχουν τουλάχιστον ένα στοιχείο από το A και τουλάχιστον ένα στοιχείο από το B .

Θέμα 2. (α) Να βρείτε το πλήθος των ακεραίων λύσεων (x_1, \dots, x_5) της εξίσωσης

$$(x_1 + x_2 + x_3)(x_1 + x_4 + x_5) = 25$$

με τους περιορισμούς $0 \leq x_i \leq 6$, $i = 1, 2, \dots, 5$.

(β) Να βρείτε το πλήθος των μη-αρνητικών ακεραίων λύσεων (x_1, \dots, x_7) του συστήματος εξισώσεων

$$\begin{aligned}(x_1 + x_2 + x_3)(x_4 + x_5 + x_6 + x_7) &= 6 \\(x_1 + x_2 + x_3) + (x_4 + x_5 + x_6 + x_7) &= 5.\end{aligned}$$

Θέμα 3. (α) Σε ένα αμφιθέατρο εξετάζονται ταυτόχρονα 300 διακεκριμένοι φοιτητές, οι $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{100}$ (οι οποίοι εξετάζονται σε θέματα της κατηγορίας Α), οι $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{100}$ (οι οποίοι εξετάζονται σε θέματα της κατηγορίας Β) και οι $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{100}$ (οι οποίοι εξετάζονται σε θέματα της κατηγορίας Γ). Καθένας από αυτούς παραδίδει το γραπτό του και τότε καταγράφεται το όνομά του σε μία λίστα (διατεταγμένη 300-άδα). Με πόσους τρόπους γίνεται να σχηματιστεί η λίστα αυτή έτσι ώστε στις πρώτες 10 θέσεις της λίστας να περιλαμβάνεται τουλάχιστον ένας φοιτητής από κάθε κατηγορία θεμάτων;

(β) Να υπολογίσετε τον αριθμό των επαναληπτικών διατάξεων των 13 στοιχείων του $\Omega = \{\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{12}\}$ ανά 52, αν το ω_0 επιτρέπεται να εμφανίζεται το πολύ 3 φορές ενώ τα υπόλοιπα στοιχεία επιτρέπεται να εμφανίζονται 0 ή 10 φορές το καθένα.

ΔΙΑΡΚΕΙΑ 2 ΩΡΕΣ. ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!