

## ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ Ι, ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ 2009 - ΟΜΑΔΑ ΘΕΜΑΤΩΝ Α

**Θέμα 1.** Θεωρούμε το σύνολο  $\Omega = \{1, 2, \dots, 2009\}$ .

(α) (0.5 βαθμ.) Πόσα υποσύνολα του  $\Omega$  έχουν ακριβώς 20 στοιχεία και περιέχουν οπωσδήποτε τους αριθμούς 3 και 8;

(β) (0.5 βαθμ.) Πόσες είναι οι μεταθέσεις των στοιχείων του  $\Omega$  που δεν έχουν διαδοχικά άρτια στοιχεία;

(γ) (0.5 βαθμ.) Πόσα υποσύνολα του  $\Omega$  έχουν ακριβώς 70 στοιχεία εκ των οποίων ακριβώς 30 είναι άρτια;

(δ) (1.0 βαθμ.) Πόσες είναι οι μεταθέσεις των στοιχείων του  $\Omega$  στις οποίες τα στοιχεία 1, 2 και 3 βρίσκονται σε κάποιες από τις 8 πρώτες θέσεις;

(ε) (2.0 βαθμ.) Πόσες είναι οι μεταθέσεις των στοιχείων του  $\Omega$  στις οποίες το στοιχείο 1 δεν καταλαμβάνει την πρώτη θέση, το στοιχείο 2 δεν καταλαμβάνει τη δεύτερη θέση και το στοιχείο 3 δεν καταλαμβάνει την τελευταία θέση;

**Θέμα 2.** (α) (1.0 βαθμ.) Να βρεθεί το πλήθος των ακέραιων λύσεων της ανίσωσης

$$x_0 + x_1 + x_2 + \dots + x_{10} \leq 200,$$

με τους περιορισμούς  $x_0 \in \{0, 1\}$ ,  $x_1 \in \{0, 10\}$  και  $x_i \geq 1$  για  $i = 2, 3, 4, \dots, 10$ .

(β) (1.0 βαθμ.) Να βρεθεί με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να κατανεμηθούν 2009 όμοια σφαιρίδια σε 20 διακεκρυμένα κελιά, όταν το πρώτο κελί έχει χωρητικότητα 100 σφαιριδίων και τα υπόλοιπα κελιά είναι απεριόριστης χωρητικότητας.

**Θέμα 3.** (α) (1.0 βαθμ.) Να υπολογιστεί το άθροισμα

$$\sum_{\kappa=0}^{\nu} \frac{\kappa^2}{\nu} \binom{\nu}{\nu - \kappa}, \nu \in \mathbb{N}.$$

(β) (1.5 βαθμ.) Να υπολογιστεί το άθροισμα

$$\sum_{\kappa=0}^{\nu} \binom{4 + \kappa}{4} \binom{\nu + 6 - \kappa}{6}, \nu \in \mathbb{N}.$$

**Θέμα 4.** Έστω  $a_\kappa$ ,  $\kappa = 0, 1, 2, \dots$  το πλήθος των συνδυασμών με επανάληψη των  $2\nu$  στοιχείων του  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{2\nu}\}$  ανά  $\kappa$ , όπου τα  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_\nu$  εμφανίζονται πολλαπλάσιο του 4 αριθμό φορές (δηλαδή 0 ή 4 ή 8 κλπ. φορές) το καθένα και τα  $\omega_{\nu+1}, \omega_{\nu+2}, \dots, \omega_{2\nu}$  εμφανίζονται 2 ή 4 φορές το καθένα.

(α) (1.0 βαθμ.) Να προσδιοριστεί η γεννήτρια συνδυασμών

$$A(t) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} a_\kappa t^\kappa.$$

(β) (1.0 βαθμ.) Να βρεθούν οι όροι  $a_\kappa$  για  $\kappa = 2\nu + 4$  και  $\kappa = 2\nu + 5$ .

**ΝΑ ΓΡΑΦΟΥΝ ΟΛΑ ΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΣΕ 2 ΩΡΕΣ. ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!**