

ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ Ι, ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΣ 2005 – Ομάδα Α

Θέμα 1^ο : Έστω $\Omega = \{1, 2, \dots, 2005\}$. Βρείτε πόσα υποσύνολα του Ω υπάρχουν που ικανοποιούν ταυτόχρονα και τις τέσσερις παρακάτω συνθήκες:

- (α) περιέχουν 80 στοιχεία
- (β) περιέχουν τα στοιχεία 1000 και 2000
- (γ) περιέχουν το πολύ 10 στοιχεία μικρότερα του 1000
- (δ) περιέχουν ακριβώς 3 στοιχεία μεγαλύτερα του 2000.

Θέμα 2^ο : Να υπολογιστούν τα αθροίσματα

$$(i) \sum_{\kappa=0}^{\nu} \frac{2\kappa^2 + 3\kappa + 4}{\kappa + 1} \binom{\nu}{\kappa}$$
$$(ii) \sum_{\kappa=0}^{\nu} (3(\nu - \kappa) + 2) \binom{\nu}{\kappa}^2.$$

Θέμα 3^ο : Να υπολογιστεί το πλήθος των ακέραιων λύσεων της εξίσωσης

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{2\nu} = \kappa + \nu(\nu + 1)$$

με τους περιορισμούς $2i \leq x_i \leq 2i + r$ για $i = 1, 2, \dots, \nu$ και $0 \leq x_i \leq r$ για $i = \nu + 1, \nu + 2, \dots, 2\nu$, όπου ν, κ και r δοθέντες θετικοί ακέραιοι με $0 \leq \kappa \leq 2\nu r$.

Θέμα 4^ο : Έστω $R(\nu, \kappa)$ το πλήθος των συνδυασμών με επανάληψη των 5ν στοιχείων του $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{5\nu}\}$ ανά κ με τους περιορισμούς: Για $i = 1, 2, \dots, 3\nu$, το ω_i εμφανίζεται το πολύ 1 φορά, ενώ για $i = 3\nu + 1, 3\nu + 2, \dots, 5\nu$, το ω_i εμφανίζεται 0 ή 2 ή 4 ή 6 ή ... φορές (άρτιο αριθμό φορές).

- (i) Να υπολογιστεί η γεννήτρια των συνδυασμών

$$A(t) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} R(\nu, \kappa) t^{\kappa}.$$

- (ii) Να δώσετε (με απόδειξη) έναν τύπο για τον υπολογισμό του $R(\nu, \kappa)$.

ΝΑ ΓΡΑΦΟΥΝ 3 ΑΠΟ ΤΑ 4 ΘΕΜΑΤΑ ΣΕ 2 ΩΡΕΣ. ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ !

Γενικές οδηγίες:

1. Τα θέματα παραδίδονται μαζί με τις κόλλες και θα πρέπει να αναγράφεται το ονοματεπώνυμό σας και σε αυτά.
2. Τα κινητά τηλέφωνα πρέπει να είναι απενεργοποιημένα και όχι απλώς στην ένδειξη «αθόρυβο», καθόλη τη διάρκεια της εξέτασης.
3. Η αποχώρηση από την αίθουσα είναι δυνατή αφού περάσουν 30 λεπτά από την έναρξη της εξέτασης.