

## ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ Ι, ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2007 - ΟΜΑΔΑ ΘΕΜΑΤΩΝ Α

**Θέμα 1.** Θεωρούμε έναν πληθυσμό από 500 (διακεκριμένα) άτομα τα οποία είναι κατανεμημένα σε 100 οικογένειες που απαρτίζονται από τον πατέρα, τη μητέρα και 3 παιδιά η καθεμιά. Από τα 500 άτομα πρόκειται να επιλεγούν 50. Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει αυτή η επιλογή σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:

- (α) Αν πρέπει να περιέχονται ακριβώς 20 παιδιά.
- (β) Αν πρέπει να περιέχονται ακριβώς 10 μητέρες και 25 παιδιά.
- (γ) Αν δεν πρέπει να συμμετέχουν άτομα από την ίδια οικογένεια.
- (δ) Αν πρέπει να περιέχονται τουλάχιστον 1 πατέρας, τουλάχιστον 1 μητέρα και τουλάχιστον 1 παιδί.

**Θέμα 2.** (α) Να υπολογιστεί το άθροισμα

$$\sum_{x=0}^v (vx^2 - v) \binom{v}{x}.$$

(β) Να υπολογιστεί το άθροισμα

$$\sum_{\rho=0}^x \binom{v}{\rho} \binom{v-\rho}{x-\rho}.$$

(γ) Να υπολογιστεί το πλήθος των ακέραιων μη-αρνητικών λύσεων της ανίσωσης

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{10} \leq 100,$$

με τους περιορισμούς τα  $x_i \geq 5$  για  $i = 1, 2, \dots, 9$  και το  $x_{10}$  να είναι πολλαπλάσιο του 25.

**Θέμα 3.** Έστω  $\Pi(v, x)$  το πλήθος των συνδυασμών με επανάληψη των  $v + 8$  στοιχείων του  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{v+8}\}$  ανά  $x$ , όπου τα  $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$  επιτρέπεται να εμφανίζονται το πολύ μια φορά, ενώ τα  $\omega_5, \omega_6, \dots, \omega_{v+8}$  επιτρέπεται να εμφανίζονται άρτιο αριθμό φορών ( $0, 2, 4, \dots$ ). Έστω επίσης  $P(v, x)$  το πλήθος των συνδυασμών με επανάληψη των  $v + 4$  στοιχείων του  $\Omega' = \{\omega'_1, \omega'_2, \dots, \omega'_{v+4}\}$  ανά  $x$ , όπου τα  $\omega'_1, \omega'_2, \omega'_3, \omega'_4$  επιτρέπεται να εμφανίζονται οσεσδήποτε φορές, ενώ τα  $\omega'_5, \omega'_6, \dots, \omega'_{v+4}$  επιτρέπεται να εμφανίζονται άρτιο αριθμό φορών ( $0, 2, 4, \dots$ ).

- (α) Να βρείτε τη γεννήτρια συνδυασμών των  $\Pi(v, x)$ .
- (β) Να βρείτε τη γεννήτρια συνδυασμών των  $P(v, x)$ .
- (γ) Να βρείτε μια σχέση (όσο πιο απλή σας είναι δυνατό) που να συνδέει τα  $\Pi(v, x), P(v, x)$ .

**ΝΑ ΓΡΑΦΟΥΝ ΚΑΙ ΤΑ 3 ΘΕΜΑΤΑ ΣΕ 2 ΩΡΕΣ. ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!**

Τα 10 υποερωτήματα είναι βαθμολογικά ισοδύναμα.