Συναρτησιακές Ανισότητες και Συγκέντρωση του Μέτρου (2011-12)
Ασκήσεις

Κεφάλαιο 1: Ισοπεριμετρικές ανισότητες και συγκέντρωση του μέτρου

1. Θεωρούμε την μοναδιαία Ευκλείδεια σφαίρα $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 = 1\}$ στον $\mathbb{R}^n$. Ορίζουμε «απόσταση» $\rho(x,y)$ δύο σημείων $x, y \in S^{n-1}$ να είναι η κυρτή γωνία xoy στο επίπεδο που ορίζεται από την αρχή των αξόνων o και τα x, y.
(α) Δείξτε ότι: αν $\rho(x,y) = \theta$ τότε

$$\|x-y\|_2 = 2\sin\frac{\theta}{2}$$

και συμπεράνατε ότι

$$\frac{2}{\pi}\rho(x,y) \leqslant \|x-y\|_2 \leqslant \rho(x,y), \qquad x, y \in S^{n-1}.$$

(β) Δείξτε ότι η ρ είναι μετρική στην S^{n-1}.

2. Έστω K ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ και έστω

$$\|x\| = \min\{t \geqslant 0 : x \in tK\}$$

η νόρμα που επάγεται στον $\mathbb{R}^n$ από το K (ελέγξτε ότι $K = \{x : \|x\| \leqslant 1\}$ δηλαδή το K είναι η μοναδιαία μπάλα του $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$). Δείξτε ότι

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|x\|}dx = |K| \cdot \int_0^\infty t^n e^{-t}dt.$$

Γενικότερα, δείξτε ότι για κάθε $p > 0$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|x\|^p}dx = |K| \cdot \int_0^\infty p t^{n+p-1} e^{-t^p}dt.$$

Υπόδειξη: Μπορείτε να γράψετε

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|x\|^p}dx = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\|x\|}^\infty p t^{p-1} e^{-t^p}dt\right) dx.$$

3. Η συνάρτηση $\Gamma : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ ορίζεται μέσω της

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}dt.$$

Δείξτε ότι:

(α) $\Gamma(1) = 1$.

(β) $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ *για κάθε* $x > 0$.

(γ) $\Gamma(n+1) = n!$ *για κάθε* $n = 0, 1, 2, \dots$

(δ) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

Δείξτε επίσης ότι η συνάρτηση Γ είναι *λογαριθμικά κυρτή*: η $\log\Gamma$ είναι κυρτή συνάρτηση.

4. Για κάθε $p \geqslant 1$, η συνάρτηση

$$\|x\|_p = (|x_1|^p + \cdots + |x_n|^p)^{1/p}$$

είναι νόρμα στον $\mathbb{R}^n$. Ορίζουμε

$$B_p^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_p \leqslant 1\}.$$

Δείξτε ότι ο όγκος της B_p^n είναι ίσος με

$$|B_p^n| = \frac{\left[2\Gamma\left(\frac{1}{p}+1\right)\right]^n}{\Gamma\left(\frac{n}{p}+1\right)}.$$

5. (*το Λήμμα του Borell*) Έστω B κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο A του $\mathbb{R}^n$, ορίζουμε

$$\mu_B(A) = \frac{|A\cap B|}{|B|}.$$

(α) Έστω $M \subseteq \mathbb{R}^n$ κυρτό και συμμετρικό ως προς το 0. Δείξτε ότι για κάθε $t > 1$ ισχύει ο εγκλεισμός

$$\mathbb{R}^n \setminus M \supseteq \frac{2}{t+1}(\mathbb{R}^n \setminus tM) + \frac{t-1}{t+1}M.$$

(β) Υποθέτουμε επιπλέον ότι $\mu_B(M) = a > 0$. Χρησιμοποιώντας το (α) και την ανισότητα Brunn-Minkowski δείξτε ότι, για κάθε $t > 1$,

$$1 - \mu_B(tM) \leqslant a\left(\frac{1-a}{a}\right)^{(t+1)/2}.$$

6. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^n$ κλειστό, κυρτό και συμμετρικό ως προς την αρχή των αξόνων. Δείξτε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ ισχύουν οι ανισότητες

$$e^{-\|x\|_2^2/2}\gamma_n(A) \leqslant \gamma_n(A+x) \leqslant \gamma_n(A).$$

7. Έστω $f, g, h : [0,\infty) \to [0,\infty)$ τρείς ολοκληρώσιμες συναρτήσεις που ικανοποιούν την

$$h(\sqrt{rs}) \geqslant \sqrt{f(r)}\cdot\sqrt{g(s)}$$

για κάθε $r, s > 0$. Δείξτε ότι

$$\int_0^\infty h(x)dx \geqslant \left(\int_0^\infty f(x)dx \cdot \int_0^\infty g(x)dx\right)^{1/2}.$$

8*. Έστω $f, g, h : [0,\infty) \to [0,\infty)$ τρείς ολοκληρώσιμες συναρτήσεις που ικανοποιούν την

$$h\left(\frac{2}{\frac{1}{r}+\frac{1}{s}}\right) \geqslant f(r)^{\frac{s}{r+s}} g(s)^{\frac{r}{r+s}}$$

για κάθε $r, s > 0$. Θεωρούμε $p > 0$ και θέτουμε

$$\begin{aligned} A &= \left(\int_0^\infty f(r)r^{p-1}\,dr\right)^{1/p}, \\ B &= \left(\int_0^\infty g(r)r^{p-1}\,dr\right)^{1/p}, \\ C &= \left(\int_0^\infty h(r)r^{p-1}\,dr\right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Δείξτε ότι

$$C \geqslant \frac{2}{\frac{1}{A}+\frac{1}{B}}.$$

9. Έστω (X,d,μ) μετρικός χώρος πιθανότητας και έστω α_μ η συνάρτηση συγκέντρωσης του μ. Υποθέτουμε ότι για κάποιο $\varepsilon \in (0,1)$ και κάποιο $t>0$ ισχύει $\alpha_\mu(t) < \varepsilon$. Δείξτε ότι: αν $A \in \mathcal{B}(X)$ και $\mu(A) \geqslant \varepsilon$, τότε

$$1-\mu(A_{t+r}) \leqslant \alpha_\mu(r)$$

για κάθε $r>0$.

10. Έστω (X,d), (Y,σ) μετρικοί χώροι και έστω $f:(X,d)\to(Y,\sigma)$ Lipsichtz συνεχής συνάρτηση με νόρμα $\|f\|_{\rm Lip}$. Δηλαδή, για κάθε $x,y\in X$ ισχύει

$$\sigma(f(x),f(y)) \leqslant \|f\|_{\rm Lip} d(x,y).$$

Έστω μ ένα Borel μέτρο πιθανότητας στον X και έστω ν το Borel μέτρο πιθανότητας $f(\mu)$ το οποίο ορίζεται μέσω της

$$\nu(A) = \mu(f^{-1}(A)), \qquad A \in \mathcal{B}(Y).$$

Δείξτε ότι

$$\alpha_\nu(t) \leqslant \alpha_\mu(t/\|f\|_{\rm Lip})$$

για κάθε $t>0$.

11. Έστω (X,d,μ) μετρικός χώρος πιθανότητας και έστω α_μ η συνάρτηση συγκέντρωσης του μ. Δείξτε ότι:

(α) Αν $F:(X,d)\to\mathbb{R}$ είναι μια 1-Lipschitz συνεχής συνάρτηση, τότε

$$(\mu\otimes\mu)\left(\{(x,y)\in X\times X : |F(x)-F(y)| \geqslant t\}\right) \leqslant 2\alpha_\mu(t/2)$$

για κάθε $t>0$.

(β) Αν $A,B\in\mathcal{B}(X)$ και ${\rm dist}(A,B)=\delta>0$, τότε

$$\mu(A)\mu(B) \leqslant 4\alpha_\mu(\delta/2).$$

12. Έστω $(X_i,\|\cdot\|_i)$, $i\leqslant n$, πεπερασμένη ακολουθία χώρων με νόρμα. Για κάθε $i\leqslant n$ θεωρούμε ένα πεπερασμένο υποσύνολο Ω_i του X_i με διάμετρο μικρότερη ή ίση του 1. Έστω P_i μέτρο πιθανότητας στο Ω_i. Θεωρούμε τον χώρο γινόμενο $X^{(n)} = \left(\sum_{i\leqslant n}\oplus X_i\right)_2$ και θέτουμε

$$\Omega = \Omega_1\times\Omega_2\times\cdots\times\Omega_n$$

και

$$P = P^n = P_1\times P_2\times\cdots\times P_n.$$

(το μέτρο γινόμενο στο Ω). Για κάθε $A\subseteq\Omega$ ορίζουμε

$$\phi_A(t) = d(t,{\rm conv}(A)),$$

την απόσταση του t από την κυρτή θήκη ${\rm conv}(A)$ του A στον $X^{(n)}$. Δείξτε ότι, για κάθε $A\subseteq\Omega$,

$$\mathbb{E}\left(e^{\phi_A^2}/4\right) \leqslant \frac{1}{P(A)}.$$

Κεφάλαιο 2: Το θεώρημα του Dvoretzky

13. Έστω $2\leqslant q\leqslant\infty$. Δείξτε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}^n$ ισχύουν οι ανισότητες

$$\|x\|_q \leqslant \|x\|_2 \leqslant n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}\|x\|_q.$$

Χρησιμοποιώντας τον ταυτοτικό τελεστή δείξτε ότι

$$d(\ell_2^n,\ell_q^n) \leqslant n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}.$$

14. (α) Δείξτε ότι: αν $y_1,\dots,y_m \in \ell_2^n$ τότε

$$\sum_{j=1}^m \|y_j\|_2^2 = \mathrm{Ave}_{\varepsilon=\pm1}\left\|\sum_{j=1}^m \varepsilon_j y_j\right\|_2^2,$$

όπου με Ave συμβολίζουμε το μέσο όρο ως προς όλες τις δυνατές επιλογές προσήμων $\varepsilon_j=\pm1$.
(β) Έστω $2\leqslant q\leqslant\infty$ και έστω $T:\ell_q^n\to\ell_2^n$ ισομορφισμός, με $\|T:\ell_q^n\to\ell_2^n\|=1$. Δείξτε ότι

$$\sum_{j=1}^n \|Te_j\|_2^2 \leqslant n^{2/q},$$

και συμπεράνατε ότι $\|Te_j\|_2\leqslant n^{\frac{1}{q}-\frac{1}{2}}$ για κάποιον $j\leqslant n$.
(γ) Δείξτε ότι

$$\|T^{-1}:\ell_2^n\to\ell_q^n\|\geqslant n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}.$$

(δ) Έστω $2\leqslant q\leqslant\infty$. Δείξτε ότι

$$d(\ell_2^n,\ell_q^n)=n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}.$$

15. Χρησιμοποιώντας την πολλαπλασιαστική τριγωνική ανισότητα για την d και την προηγούμενη άσκηση, δείξτε ότι: αν $2\leqslant p<q\leqslant+\infty$ τότε

$$d(\ell_p^n,\ell_q^n)\geqslant n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}.$$

Χρησιμοποιώντας τον ταυτοτικό τελεστή δείξτε ότι

$$d(\ell_p^n,\ell_q^n)= n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}.$$

Έστω $1\leqslant p<q\leqslant 2$. Χρησιμοποιώντας την $d(X^*,Y^*)=d(X,Y)$ δείξτε ότι

$$d(\ell_p^n,\ell_q^n)= n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}.$$

16. Οι πίνακες Walsh είναι ορθογώνιοι $2^k\times2^k$ πίνακες, που ορίζονται επαγωγικά ως εξής: Θέτουμε $W_0=[1]$, και

$$W_k=\begin{bmatrix} W_{k-1} & W_{k-1}\\ W_{k-1} & -W_{k-1}\end{bmatrix},\qquad k\geqslant1.$$

Δείξτε ότι ο $\frac{1}{2^{k/2}}W_k$ είναι ορθογώνιος πίνακας με την ιδιότητα: όλες του οι συντεταγμένες έχουν απόλυτη τιμή $\frac{1}{2^{k/2}}$.

17. Έστω $n=2^k$ και έστω $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ ο τελεστής που αντιστοιχεί στον $\frac{1}{2^{k/2}}W_k$.
(α) Παρατηρήστε ότι

$$\|T^{-1}:\ell_2^n\to\ell_2^n\|=1$$

και συμπεράνατε ότι

$$\|T^{-1}:\ell_\infty^n\to\ell_1^n\|\leqslant n.$$

(β) Παρατηρήστε ότι $\|Te_j\|_\infty=1/\sqrt{n}$ για κάθε $j=1,\dots,n$ και συμπεράνατε ότι

$$\|T:\ell_1^n\to\ell_\infty^n\|=\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

(γ) Δείξτε ότι $d(\ell_1^n,\ell_\infty^n)\leqslant\sqrt{n}$.

18*. Δείξτε ότι υπάρχει σταθερά $c>0$ ώστε $d(\ell_1^n,\ell_\infty^n)\leqslant c\sqrt{n}$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$.

19. Έστω $T : \ell_1^n \to \ell_\infty^n$ ισομορφισμός, ο οποίος ικανοποιεί την

$$\frac{1}{d} B_\infty^n \subseteq T(B_1^n) \subseteq B_\infty^n,$$

όπου B_∞^n, B_1^n οι μοναδιαίες μπάλες των ℓ_∞^n, ℓ_1^n αντίστοιχα.

(α) Αν $x_j = T(e_j)$, $j = 1, \dots, n$, δείξτε ότι

$$|T(B_1^n)| = \frac{2^n}{n!} |\det X|,$$

όπου X ο πίνακας με στήλες τα $x_1, \dots, x_n$. [*Υπόδειξη:* Αρκεί να δείξετε ότι $|B_1^n| = 2^n/n!$.]

(β) Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $x_1, \dots, x_n \in B_\infty^n$ και την ανισότητα του Hadamard, δείξτε ότι $|\det X| \leqslant n^{n/2}$.

(γ) Δείξτε ότι $d \geqslant c_1 \sqrt{n}$, όπου $c_1 > 0$ σταθερά ανεξάρτητη από τον T και από το n.

(δ) Δείξτε ότι $d(\ell_1^n, \ell_\infty^n) \geqslant c_1 \sqrt{n}$, όπου $c_1 > 0$ η σταθερά στο (γ).

20*. Έστω K συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ το οποίο περιέχει την B_2^n. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν $\lambda_1, \dots, \lambda_m > 0$ και σημεία επαφής $u_1, \dots, u_m$ των K και B_2^n ώστε

$$x = \sum_{j=1}^m \lambda_j \langle x, u_j \rangle u_j$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι η B_2^n είναι το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου του K.

21. Δίνονται $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}^n$ (όχι αναγκαστικά διακεκριμένα) ώστε

$$I = \sum_{j=1}^m x_j \otimes x_j.$$

(α) Δείξτε ότι $\sum_{j=1}^m \|x_j\|_2^2 = n$.

(β) Δείξτε ότι, για κάθε επιλογή πραγματικών αριθμών $a_1, \dots, a_m$,

$$\left\| \sum_{j=1}^m a_j x_j \right\|_2 \leqslant \left(\sum_{j=1}^m a_j^2 \right)^{1/2}.$$

22*. Έστω K συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Υποθέτουμε ότι η B_2^n είναι το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου του K. Δείξτε ότι υπάρχει παραλληλεπίπεδο P ώστε $K \subseteq P$ και

$$|P| \leqslant 2^n \frac{n^{n/2}}{\sqrt{n!}}.$$

Υπόδειξη. Χρησιμοποιήστε το Λήμμα Dvoretzky-Rogers.

23. Έστω $v_1, \dots, v_m \in \mathbb{R}^n$. Υποθέτουμε ότι το συμμετρικό κυρτό πολύεδρο

$$K = \{ y \in \mathbb{R}^n : |\langle y, v_j \rangle| \leqslant 1 \text{ για κάθε } j = 1, \dots, m \}$$

ικανοποιεί την $B_2^n \subseteq K \subseteq \alpha B_2^n$ για κάποιον $\alpha > 1$. Δείξτε ότι $m \geqslant \exp(n/(2\alpha^2))$.

24. Έστω $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ και έστω $\varepsilon \in (0,1)$. Δείξτε ότι υπάρχουν $N \leqslant \left(1 + \frac{2}{\varepsilon}\right)^n$ και $T : X \to \ell_\infty^n$ με την ιδιότητα

$$(1 - \varepsilon)\|x\| \leqslant \|T(x)\|_{\ell_\infty^n} \leqslant (1 + \varepsilon)\|x\|$$

για κάθε $x \in X$.

25. Έστω $g_1, \ldots, g_n$ ανεξάρτητες τυπικές κανονικές τυχαίες μεταβλητές σε έναν χώρο πιθανότητας Ω και έστω $\{e_1, \ldots, e_n\}$ ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^n$.
(α) Έστω $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$. Δείξτε ότι

$$\|G\|_q := \left(\int_\Omega \left\| \sum_{i=1}^n g_i(\omega) e_i \right\|^q d\omega \right)^{1/q} = c_{n,q} M_q(X)$$

όπου

$$M_q(X) = \left(\int_{S^{n-1}} \|x\|^q d\sigma(x) \right)^{1/q},$$

και υπολογίστε τις σταθερές $c_{n,1}$ και $c_{n,2}$.
(β) Δείξτε ότι, αν $1 \leqslant k \leqslant n$,

$$\int_\Omega \left\| \sum_{i=1}^k g_i(\omega) e_i \right\| d\omega \leqslant \int_\Omega \left\| \sum_{i=1}^n g_i(\omega) e_i \right\| d\omega.$$

(γ) Δείξτε ότι, αν Y είναι ένας k-διάστατος υπόχωρος του X, τότε

$$M_1(Y) \leqslant c\sqrt{n/k} M_1(X),$$

όπου $c > 0$ απόλυτη σταθερά.

26. Έστω $f : S^{n-1} \to \mathbb{R}$ Lipschitz συνεχής συνάρτηση με σταθερά 1 και έστω L ο μέσος Lévy της f.
(α) Δείξτε ότι, για κάθε $t > 0$,

$$\begin{aligned}(\sigma \otimes \sigma)\{(x,y) \in S^{n-1} \times S^{n-1} : |f(x) - f(y)| \geqslant t\}) &\leqslant 2\sigma(\{x \in S^{n-1} : |f(x) - L| \geqslant t/2\}) \\ &\leqslant c_1 \exp(-c_2 t^2 n).\end{aligned}$$

(β) Έστω $\mathbb{E}(f) = \int_{S^{n-1}} f(x)\, d\sigma(x)$. Δείξτε ότι, για κάθε $a \in \mathbb{R}$,

$$\int_{S^{n-1}} \exp(a^2 |f(x) - \mathbb{E}(f)|^2)\, d\sigma(x) \leqslant \int_{S^{n-1}} \int_{S^{n-1}} \exp(a^2 (f(x) - f(y))^2)\, d\sigma(x)\, d\sigma(y).$$

(γ) Δείξτε ότι

$$\int_{S^{n-1}} \int_{S^{n-1}} \exp(a^2 (f(x) - f(y))^2)\, d\sigma(x)\, d\sigma(y) \leqslant c a^2 \int_0^\infty t e^{a^2 t^2 - c t^2 n} dt,$$

και, επιλέγοντας $a \simeq \sqrt{n}$, δείξτε ότι

$$\int_{S^{n-1}} \int_{S^{n-1}} \exp(a^2 (f(x) - f(y))^2)\, d\sigma(x)\, d\sigma(y) \leqslant c_2,$$

όπου $c_1, c_2 > 0$ απόλυτες σταθερές.
(δ) Δείξτε ότι, για κάθε $t > 0$,

$$\sigma(\{x : |f(x) - \mathbb{E}(f)| \geqslant t\}) \leqslant c_3 \exp(-c_4 t^2 n),$$

όπου $c_3, c_4 > 0$ απόλυτες σταθερές.

27. Έστω $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$. Συμβολίζουμε με b τη μικρότερη θετική σταθερά για την οποία η ανισότητα $\|x\| \leqslant b\|x\|_2$ ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι

$$\max\left\{ M_1, c_1 \frac{b\sqrt{q}}{\sqrt{n}} \right\} \leqslant M_q \leqslant \max\left\{ 2M_1, c_2 \frac{b\sqrt{q}}{\sqrt{n}} \right\}$$

για κάθε $q \in [1, n]$, όπου c_1, c_2 είναι απόλυτες θετικές σταθερές.

(α) *Υπόδειξη για την δεξιά ανισότητα.* Η συνάρτηση $\|\cdot\| : S^{n-1} \to \mathbb{R}$ είναι Lipschitz συνεχής με σταθερά b. Από τη σφαιρική ισοπεριμετρική ανισότητα έπεται ότι

$$\sigma\big(x \in S^{n-1} : \big| \|x\| - M_1 \big| > t\big) \leqslant 2\exp(-ct^2 n/b^2)$$

για κάθε $t > 0$. Από την τριγωνική ανισότητα στον $L^q(S^{n-1})$,

$$M_q - M_1 \leqslant \| \|x\| - M_1 \|_q.$$

(β) *Υπόδειξη για την αριστερή ανισότητα.* Υπάρχει $z \in S^{n-1}$ ώστε $B_X \subseteq \{y : |\langle y, z\rangle| \leqslant 1/b\}$. Συνεπώς,

$$\{x \in S^{n-1} : \|x\| \geqslant t\} \supseteq C_t := \{x \in S^{n-1} : |\langle x, z\rangle| \geqslant t/b\}$$

για κάθε $t > 0$. Χρησιμοποιήστε την

$$M_q = \left(q \int_0^\infty t^{q-1}\sigma(\{x : \|x\| \geqslant t\})\, dt\right)^{1/q} \geqslant \left(q \int_0^\infty t^{q-1}\sigma(C_t)\, dt\right)^{1/q}.$$

28. Έστω $x_1, \dots, x_t \in S^{n-1}$. Δείξτε ότι υπάρχει $y \in S^{n-1}$ ώστε

$$\sum_{i=1}^t |\langle y, x_i\rangle| \geqslant \sqrt{t}.$$

Υπόδειξη. Θεωρήστε όλα τα διανύσματα της μορφής $z(\varepsilon) = \sum_{i=1}^t \varepsilon_i x_i$ όπου $\varepsilon_i = \pm 1$, και επιλέξτε ένα με τη μεγαλύτερη δυνατή Ευκλείδεια νόρμα.

29. Έστω $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$. Έστω $t(X)$ ο μικρότερος φυσικός t για τον οποίο υπάρχουν $U_1, \dots, U_t \in O(n)$ ώστε

$$(*) \qquad \frac{1}{2}M\|x\|_2 \leqslant \frac{1}{t}\sum_{i=1}^t \|U_i(x)\| \leqslant 2M\|x\|_2$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι

$$t(X) \geqslant \frac{1}{4}(b/M)^2,$$

όπου b η μικρότερη θετική σταθερά για την οποία η ανισότητα $\|x\| \leqslant b\|x\|_2$ ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$.
Υπόδειξη. Υποθέστε ότι η $(*)$ ισχύει για κάποιους $U_1, \dots, U_t \in O(n)$. Θεωρήστε $x_0 \in S^{n-1}$ με $\|x_0\| = b$ και χρησιμοποιήστε την Άσκηση 28 για τα $x_i = U_i^{-1}(x_0)$.

30. Έστω $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1)$ και $Y = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$. Υποθέτουμε ότι $v(B_X) \leqslant n^\alpha$ και $v(B_{Y^*}) \leqslant n^\beta$ για κάποιους $\alpha, \beta \geqslant 1$, όπου $v(P)$ είναι το πλήθος των κορυφών ενός πολυτόπου P. Δείξτε ότι

$$d(X, Y) \leqslant c\sqrt{\alpha + \beta}\sqrt{n \log n}.$$

Υπόδειξη. Μπορείτε να υποθέσετε ότι

$$\frac{1}{\sqrt{n}}B_2^n \subseteq B_X \subseteq B_2^n \subseteq B_Y \subseteq \sqrt{n}B_2^n.$$

Παρατηρήστε ότι, για κάθε $U \in O(n)$, ισχύουν οι $\|U^{-1} : Y \to X\| \leqslant n$ και

$$\|U : X \to Y\| = \sup_{x \in B_X} \|U(x)\|_Y = \max_{x \in \mathrm{ext}(B_X)} \max_{y^* \in \mathrm{ext}(B_{Y^*})} |\langle U(x), y^*\rangle|,$$

όπου $\mathrm{ext}(P)$ είναι το σύνολο των κορυφών του πολυτόπου P. Για σταθερά x, y^* και $\varepsilon > 0$ εκτιμήστε το

$$\nu(\{U \in O(n) : |\langle U(x), y^*\rangle| \geqslant \varepsilon\}).$$

31. Έστω P ένα συμμετρικό πολύτοπο στον $\mathbb{R}^n$ και έστω $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_P)$. Γράφουμε $f(P)$ για το πλήθος των $(n-1)$-διάστατων εδρών του και $v(P)$ για το πλήθος των κορυφών του. Με $K(X)$ συμβολίζουμε την «διάσταση Dvoretzky» $n(M/b)^2$ του X.

(α) Δείξτε ότι $k(X) \leqslant \log f(P)$ και $k(X^*) \leqslant \log v(P)$.

(β) Δείξτε ότι $\log f(P) \cdot \log v(P) \geqslant cn$, όπου $c > 0$ απόλυτη σταθερά.

32. Έστω K ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Υποθέτουμε ότι η B_2^n είναι το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου του K και ότι $(|K|/|B_2^n|)^{1/n} = A$.

(α) Δείξτε ότι

$$\int_{O(n)} \int_{S^{n-1}} \frac{1}{\|U\theta\|^n \|\theta\|^n} \sigma(d\theta)\nu(dU) = A^{2n}.$$

(β) Για κάθε $U \in O(n)$ και $\theta \in S^{n-1}$ θέτουμε $N_U(\theta) = \frac{\|U\theta\| + \|\theta\|}{2}$. Δείξτε ότι υπάρχει $U \in O(n)$ ώστε

$$\int_{S^{n-1}} \frac{1}{[N_U(\theta)]^{2n}} \sigma(d\theta) \leqslant A^{2n}$$

και συμπεράνατε ότι $N_U(\theta) \geqslant \frac{c}{A^2}$ για κάθε $\theta \in S^{n-1}$.

(γ) Αν ο U ικανοποιεί το (β), δείξτε ότι

$$B_2^n \subseteq K \cap U(K) \subseteq 8A^2 B_2^n.$$

Κεφάλαιο 3: Η μέθοδος των martingales

33. Έστω $Y_1, \ldots, Y_n$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές στον χώρο πιθανότητας $(X, \mathcal{A}, P)$. Υποθέτουμε ότι για κάθε $i = 1, \ldots, n$ υπάρχουν $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ ώστε $a_i \leqslant Y_i \leqslant b_i$. Αν $S_n = Y_1 + \cdots + Y_n$, δείξτε ότι

$$P(\{S_n \geqslant \mathbb{E}(S_n) + t\}) \leqslant e^{-t^2/(2D^2)}$$

για κάθε $t > 0$, όπου $D^2 = \sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2$.

34. Έστω $Y_1, \ldots, Y_n$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές στον χώρο πιθανότητας $(X, \mathcal{A}, P)$ με τιμές σε έναν χώρο με νόρμα $(X, \|\cdot\|)$. Υποθέτουμε ότι για κάθε $i = 1, \ldots, n$ υπάρχει $M_i \in \mathbb{R}$ ώστε $\|Y_i\| \leqslant M_i$. Αν $S_n = Y_1 + \cdots + Y_n$, δείξτε ότι

$$P(\{\|S_n\| \geqslant \mathbb{E}(\|S_n\|) + t\}) \leqslant e^{-t^2/(2D^2)}$$

για κάθε $t > 0$, όπου $D^2 = \sum_{i=1}^n M_i^2$.

35. Έστω (X_i, μ_i) χώροι πιθανότητας $(i = 1, \ldots, n)$ και έστω $\mu = \mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_n$ το μέτρο γινόμενο στον $X = X_1 \times \cdots \times X_n$. Έστω $c_1, \ldots, c_n > 0$ και $F : X \to \mathbb{R}$ συνάρτηση που ικανοποιεί την

$$|F(x) - F(y)| \leqslant \sum_{i=1}^n c_i \mathbf{1}_{x_i \neq y_i}$$

για κάθε $x, y \in X$. Δείξτε ότι

$$\mu(\{F \geqslant \mathbb{E}_\mu(F) + t\}) \leqslant e^{-t^2/(2D^2)}$$

για κάθε $t > 0$, όπου $D^2 = \sum_{i=1}^n c_i^2$.

36. Λέμε ότι ένας μετρικός χώρος (X, d) έχει μήκος ℓ αν ο ℓ είναι ο μικρότερος θετικός αριθμός με την εξής ιδιότητα: μπορούμε να βρούμε μια αύξουσα ακολουθία $\{X\} = X^0, X^1, \ldots, X^n = \{\{x\} : x \in X\}$ διαμερίσεων του X (αύξουσα σημαίνει ότι η X^i είναι εκλέπτυνση της X^{i-1}) και θετικούς πραγματικούς αριθμούς $a_1, \ldots, a_n$ με $\sum_{i=1}^n a_i^2 = \ell^2$ ώστε, αν $X^i = \{A_j^i\}_{1 \leqslant j \leqslant m_i}$, τότε για κάθε $i = 1, \ldots, n$, και για κάθε $p = 1, \ldots, m_{i-1}$ και j, k με $A_j^i, A_k^i \subset A_p^{i-1}$, υπάρχει μια 1-1 και επί απεικόνιση $\phi : A_j^i \to A_k^i$ ώστε $d(x, \phi(x)) \leqslant a_i$ για κάθε $x \in A_j^i$.

(α) Δείξτε ότι το μήκος ℓ του (X,d) είναι μικρότερο ή ίσο της διαμέτρου $\mathrm{diam}(X)$ του X.

(β) Έστω (X,d,μ) μετρικός χώρος πιθανότητας με μήκος ℓ. Δείξτε ότι για κάθε 1-Lipschitz συνεχή συνάρτηση $F : X \to \mathbb{R}$ και για κάθε $t>0$ ισχύει

$$\mu(\{F \geqslant \mathbb{E}_\mu(f)+t\}) \leqslant e^{-t^2/2\ell^2}.$$

Ειδικότερα, για κάθε $t>0$,

$$\alpha_\mu(t) \leqslant e^{-t^2/8\ell^2}.$$

Κεφάλαιο 4: Συναρτησοειδές Laplace και ελαχιστική συνέλιξη

37. Έστω $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ συνάρτηση Lipschitz με $\|F\|_{\mathrm{Lip}} \leqslant \alpha$. Υποθέτουμε επίσης ότι

$$|F(x)-F(y)| \leqslant b\|x-y\|_1$$

για κάθε $x,y\in\mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι, για κάθε $t>0$,

$$\xi_n(\{F \geqslant M+t\}) \leqslant C\exp\left(-\frac{1}{C}\min\left(\frac{t}{b},\frac{t^2}{a^2}\right)\right),$$

όπου $C>0$ είναι μια απόλυτη σταθερά και M είναι είτε ένας μέσος Lévy της F ή η μέση τιμή $\mathbb{E}(f)$ της f.

38. Έστω μ ένα μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$ με πυκνότητα e^{-V}, όπου $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $w : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ ώστε

$$V(x)+V(y)-2V\left(\frac{x+y}{2}\right) \geqslant w(x-y)$$

για κάθε $x,y\in\mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι: για κάθε $f:\mathbb{R}^n\to(-\infty,\infty]$ με $\int e^{-f}d\mu\in(0,\infty)$, ισχύει

$$\int e^{f\Box w}d\mu\cdot\int e^{-f}d\mu \leqslant 1.$$

39. Έστω μ ένα μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$ με πυκνότητα e^{-V}, όπου $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν $c>0$, $p\geqslant 1$ και μια νόρμα $\|\cdot\|$ στον $\mathbb{R}^n$ ώστε

$$V(x)+V(y)-2V\left(\frac{x+y}{2}\right) \geqslant \frac{c}{2p}\|x-y\|^p$$

για κάθε $x,y\in\mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι: για κάθε Borel σύνολο $A\subseteq\mathbb{R}^n$ ισχύει

$$\int e^{\frac{c}{2p}d(x,A)^p}d\mu(x) \leqslant \frac{1}{\mu(A)},$$

όπου $d(x,A)=\inf\{\|x-y\| : y\in A\}$. Συνεπώς, αν $\mu(A)\geqslant\frac{1}{2}$ τότε, για κάθε $t>0$,

$$\mu(\{x : d(x,A)\geqslant t\}) \leqslant 2\exp\left(-\frac{c}{2p}t^p\right).$$

40*. Έστω X ένας χώρος με νόρμα, εφοδιασμένος με ένα Borel μέτρο πιθανότητας και έστω $\phi : X\to\mathbb{R}^+$ κυρτή συνάρτηση κόστους. Η ελαχιστική συνέλιξη μιας μετρήσιμης $f : X\to\mathbb{R}$ με την ϕ ορίζεται ως εξής:

$$Q_\phi f(x) = \inf_{y\in X}\left[f(y)+\phi(x-y)\right].$$

Λέμε ότι το μ ικανοποιεί την ανισότητα κυρτής ελαχιστικής συνέλιξης ως προς την ϕ αν για κάθε φραγμένη μετρήσιμη κυρτή συνάρτηση $f : X\to\mathbb{R}$ ισχύει

$$\int e^{Q_\phi f}d\mu\cdot\int e^{-f}d\mu \leqslant 1.$$

(α) Στο προηγούμενο πλαίσιο, υποθέτουμε ότι το μ έχει φορέα κάποιο σύνολο A διαμέτρου $\mathrm{diam}(A) \leqslant 1$. Δείξτε ότι το μ ικανοποιεί την ανισότητα κυρτής ελαχιστικής συνέλιξης ως προς την $\phi(x) = \frac{\|x\|^2}{4}$.
(β) Έστω $X_1, \ldots, X_n$ χώροι με νόρμα. Υποθέτουμε ότι, για κάθε $i = 1, \ldots, n$ έχουμε ένα μέτρο πιθανότητας μ_i στον X_i το οποίο έχει φορέα κάποιο σύνολο A_i διαμέτρου $\mathrm{diam}(A_i) \leqslant 1$. Δείξτε ότι το $\mu = \mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_n$ στον $X = X_1 \times \cdots \times X_n$ ικανοποιεί την ανισότητα κυρτής ελαχιστικής συνέλιξης ως προς την $\phi(x) = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^n \|x_i\|^2$.

Κεφάλαιο 5: Ανισότητα Poincaré

41. Έστω μ μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$ το οποίο ικανοποιεί την ανισότητα Poincaré με σταθερά $C > 0$. Αν $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ είναι φραγμένη συνάρτηση και αν $d\nu = \frac{1}{\mathbb{E}_\mu(e^F)} e^F d\mu$, δείξτε ότι το ν ικανοποιεί την ανισότητα Poincaré με σταθερά $Ce^{4\|F\|_\infty}$.

42. Έστω ν το εκθετικό μέτρο πιθανότητας στο $\mathbb{R}$ με πυκνότητα $\frac{1}{2}e^{-|x|}$, $x \in \mathbb{R}$. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι

$$\int f d\nu = f(0) + \int \mathrm{sign}(x) f'(x) d\nu(x)$$

και συμπεράνατε ότι

$$\mathrm{Var}_\nu(f) \leqslant 4 \int [f'(x)]^2 d\nu(x).$$

43. Έστω $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ μια 1-Lipschitz συνάρτηση. Για κάθε $\varepsilon > 0$ ορίζουμε

$$f_\varepsilon(x) = \frac{1}{|B(x,\varepsilon)|} \int_{B(x,\varepsilon)} f(y) dy.$$

Δείξτε ότι η f_ε είναι διαφορίσιμη και $\|\nabla f_\varepsilon(x)\|_2 \leqslant 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$. Δείξτε επίσης ότι

$$\|f - f_\varepsilon\|_\infty \leqslant \frac{\varepsilon n}{n+1} \leqslant \varepsilon,$$

δηλαδή $f_\varepsilon \to f$ ομοιόμορφα καθώς το $\varepsilon \to 0^+$.

44. Με τις υποθέσεις της προηγούμενης άσκησης δείξτε ότι

$$\|\nabla f_\varepsilon(x) - \nabla f_\varepsilon(y)\|_2 \leqslant \frac{c\sqrt{n}}{\varepsilon} \|x - y\|_2$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^n$, όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Κεφάλαιο 6: Ανισότητα Kahane-Khintchine

45. Έστω μ ένα λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$ και έστω $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ γραμμικός μετασχηματισμός. Δείξτε ότι το μέτρο $\nu = T(\mu)$, που ορίζεται από την $\nu(A) = \mu(T^{-1}(A))$, είναι λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^m$.

46. Έστω $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ λογαριθμικά κοίλες πυκνότητες (δηλαδή, $\int f = \int g = 1$). Δείξτε ότι η συνέλιξή τους

$$h(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) g(x-y)\, dy$$

είναι λογαριθμικά κοίλη πυκνότητα.

47. Έστω $X_1, \ldots, X_n$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές στον $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Αν $\|X_i\|_{\psi_2} < \infty$ για κάθε $i = 1, \ldots, n$, δείξτε ότι

$$\|X_1 + \cdots + X_n\|_{\psi_2}^2 \leqslant C \sum_{i=1}^n \|X_i\|_{\psi_2}^2,$$

όπου $C>0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

48. Έστω $X_1,\dots,X_n$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές στον $(\Omega,\mathcal{A},P)$. Αν $\|X_i\|_{\psi_2}\leqslant M$ για κάθε $i=1,\dots,n$, δείξτε ότι

$$P(|a_1X_1+\cdots+a_nX_n|\geqslant t)\leqslant C\exp\left(-\frac{ct^2}{M^2\|a\|_2^2}\right)$$

για κάθε $a=(a_1,\dots,a_n)\in\ell_2^n$, όπου $C,c>0$ είναι δύο απόλυτες σταθερές.

49. Έστω $X_1,\dots,X_n$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές στον $(\Omega,\mathcal{A},P)$. Αν $\|X_i\|_{\psi_2}\leqslant M$ για κάθε $i=1,\dots,n$, δείξτε ότι

$$\|a_1X_1+\cdots+a_nX_n\|_p\leqslant CM\sqrt{p}\|a\|_2$$

για κάθε $a=(a_1,\dots,a_n)\in\ell_2^n$, όπου $C>0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

50. Έστω X τυχαία μεταβλητή στον $(\Omega,\mathcal{A},P)$. Αν $\|X\|_{\psi_1}<\infty$ δείξτε ότι για κάθε $0<t<c/\|X\|_{\psi_1}$ ισχύει

$$\mathbb{E}(e^{tX})\leqslant\exp(Ct^2\|X\|_{\psi_1}^2),$$

όπου $C,c>0$ είναι δύο απόλυτες σταθερές.

51. Έστω $X_1,\dots,X_n$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές στον $(\Omega,\mathcal{A},P)$. Αν $\|X_i\|_{\psi_1}\leqslant M$ για κάθε $i=1,\dots,n$, δείξτε ότι

$$P(|a_1X_1+\cdots+a_nX_n|\geqslant t)\leqslant C\exp\left(-c\min\left\{\frac{t^2}{M^2\|a\|_2^2},\frac{t}{M\|a\|_\infty}\right\}\right)$$

για κάθε $a=(a_1,\dots,a_n)\in\ell_2^n$, όπου $C,c>0$ είναι δύο απόλυτες σταθερές.

Κεφάλαια 7 και 8: Λογαριθμική ανισότητα Sobolev και υπερσυσταλτότητα

52. Έστω $a,b\in\mathbb{R}$ και έστω $F:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ η συνάρτηση που ορίζεται από την $F(x,y)=ax+by$. Δείξτε ότι $F(\gamma_n\otimes\gamma_n)=\gamma_n$, όπου

$$[F(\gamma_n\otimes\gamma_n)](A)=(\gamma_n\otimes\gamma_n)(\{(x,y):F(x,y)\in A\}).$$

Υπόδειξη. Ο $U:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ με $U(x,y)=(ax+by,bx-ay)$ είναι ορθογώνιος.

53. Έστω L ο γεννήτορας της ημιομάδας Ornstein-Uhlenbeck στον $\mathbb{R}^n$. Αν f είναι μια λεία συνάρτηση στον $\mathbb{R}^n$, δείξτε ότι

$$\frac{1}{2}L(|\nabla f|^2)-\langle\nabla f,\nabla(Lf)\rangle\geqslant|\nabla f|^2.$$

Για κάθε $t\geqslant 0$ θέτουμε $\alpha(t)=\mathrm{Ent}_{\gamma_n}(T_tf)$. Σταθεροποιούμε $t\geqslant 0$ και θέτουμε $F=\log T_tf$. Δείξτε ότι

$$\alpha''(t)=2\int\langle\nabla F,\nabla L(\log F)\rangle d\gamma_n-\int L(|\nabla\log F|^2)Fd\gamma_n.$$

Δείξτε ότι $\alpha''(t)\leqslant-2\alpha'(t)$ και συμπεράνατε την λογαριθμική ανισότητα Sobolev.

54. Έστω ν το εκθετικό μέτρο πιθανότητας στο $\mathbb{R}$ με πυκνότητα $\frac{1}{2}e^{-|x|}$, $x\in\mathbb{R}$. Δείξτε ότι: για κάθε $0<\rho<1$ και για κάθε Lipschitz συνεχή συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $|f'|\leqslant\rho<1$ σχεδόν παντού, ισχύει

$$\mathrm{Ent}_\nu(e^f)\leqslant\frac{2}{1-\rho}\int(f')^2e^fd\nu.$$

Κεφάλαιο 9: Ισοτροπική σταθερά κυρτών σωμάτων

55. Δείξτε ότι: για κάθε ισοτροπικό κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ ισχύει

$$L_K \geqslant L_{B_2^n} \geqslant c,$$

όπου $c>0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

56. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα του John δείξτε ότι για κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ ισχύει $L_K \leqslant c\sqrt{n}$, όπου $c>0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

57. Έστω K και T ισοτροπικά κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$ και στον $\mathbb{R}^m$ αντίστοιχα. Δείξτε ότι το $W := (L_T/L_K)^{\frac{m}{n+m}} K \times (L_K/L_T)^{\frac{n}{n+m}} T$ είναι ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^{n+m}$ και συμπεράνατε ότι

$$L_{K\times T} = L_K^{\frac{n}{n+m}} L_T^{\frac{m}{n+m}}.$$

58. Υποθέτουμε ότι υπάρχει σταθερά $A>0$ ώστε για κάθε n να ισχύει το εξής: αν K και T είναι ισοτροπικά κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$, τότε

$$|K+T|^{1/n} \leqslant 2A = A\left(|K|^{1/n} + |T|^{1/n}\right).$$

Δείξτε ότι, για κάθε κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$,

$$L_K \leqslant cA^4,$$

όπου $c>0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Υπόδειξη. Θεωρήστε το $W = (L_{D_n}/L_K)^{1/2} K \times (L_K/L_{D_n}) D_n$ και εφαρμόστε την υπόθεση για τα W και D_{2n} (με D_k συμβολίζουμε την Ευκλείδεια μπάλα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^k$).

59. Σκοπός μας είναι να δώσουμε άνω φράγμα για τους αριθμούς κάλυψης $N(K, tB_2^n)$ ενός ισοτροπικού κυρτού σώματος K στον $\mathbb{R}^n$ μέσω της ποσότητας

$$I(K) = \int_K \|x\|_2 dx.$$

Δείξτε ότι: για κάθε $t>0$ ισχύει

$$N(K, tB_2^n) \leqslant 2\exp\left(\frac{4(n+1)I(K)}{t}\right) \leqslant 2\exp\left(\frac{6n^{3/2}L_K}{t}\right).$$

Υπόδειξη. Θεωρήστε το μέτρο πιθανότητας μ στον $\mathbb{R}^n$

$$\mu(A) = \frac{1}{c_K}\int_A e^{-p_K(x)}dx,$$

όπου $p_K(x) = \inf\{\lambda > 0 : x \in \lambda K\}$ είναι το συναρτησοειδές Minkowski του K και $c_K = \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-p_K(x))dx$. Δείξτε ότι $c_K = n!$ και μιμηθείτε την απόδειξη της δυϊκής ανισότητας Sudakov.

60*. Έστω K ένα ισοτροπικό συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι

$$h_K(u)^2 \leqslant (n+1)^2 \int_K \langle x, u\rangle^2 dx$$

για κάθε $u \in S^{n-1}$ και συμπεράνατε ότι

$$R(K) = \max\{\|x\|_2 : x \in K\} \leqslant (n+1)L_K.$$

61. Έστω K ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Ορίζουμε

$$\phi(K) = \frac{1}{|K|\cdot|K^\circ|}\int_K\int_{K^\circ}\langle x,y\rangle^2 dydx.$$

Δείξτε ότι

$$L_K^2 L_{K^\circ}^2 \leqslant c_1 n\phi(K)$$

και συμπεράνατε ότι $L_K L_{K^\circ} \leqslant c_2\sqrt{n}$, όπου $c_1, c_2 > 0$ απόλυτες σταθερές.

62. Έστω K ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι, για κάθε $q \geqslant 1$,

$$\left(\int_{S^{n-1}}\int_K |\langle x,\theta\rangle|^q dx\sigma(d\theta)\right)^{1/q} \simeq \sqrt{\frac{q}{q+n}}\left(\int_K \|x\|_2^q dx\right)^{1/q}.$$

Χρησιμοποιώντας το παραπάνω, δείξτε ότι αν $f(x) = \|x\|_2$ τότε

$$\|f\|_{\psi_2} \leqslant c\sqrt{n}L_K,$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.