

Απειροστικός Λογισμός II (2010-11)

Επαναληπτικές Ασκήσεις

1. Δώστε παράδειγμα ακολουθίας (a_n) η οποία δεν συγκλίνει, αλλά ικανοποιεί το εξής: για κάθε $k \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+k} - a_n) = 0.$$

2. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση. Δείξτε ότι υπάρχει γνησίως αύξουσα ακολουθία (x_n) στο \mathbb{R} ώστε η ακολουθία $(f(x_n))$ να συγκλίνει.

3. Έστω (a_n) μια ακολουθία. Αν $\sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} = 1$ και $a_n \neq 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε υπάρχει γνησίως αύξουσα υπακολουθία (a_{k_n}) της (a_n) ώστε $a_{k_n} \rightarrow 1$.

4. Έστω (a_n) ακολουθία θετικών αριθμών. Θεωρούμε το σύνολο $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Αν $\inf A = 0$, δείξτε ότι η (a_n) έχει φθίνουσα υπακολουθία που συγκλίνει στο 0.

5. Έστω (a_n) ακολουθία στο \mathbb{R} . Υποθέτουμε ότι υπάρχει $0 < b < 1$ ώστε: $|a_{n+1} - a_n| \leq b^n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι η (a_n) συγκλίνει.

6. Να βρεθούν τα \liminf και \limsup των παρακάτω ακολουθιών:

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \cos \frac{\pi n}{3}, & \beta_n &= ((-1)^n + 1)n^2 \\ \gamma_n &= \left(1 - \frac{1}{n}\right) \sin \frac{\pi n}{2}, & \delta_n &= \frac{n}{3} - \left[\frac{n}{3}\right] \\ \epsilon_n &= n \sin \frac{\pi n}{3}, & \zeta_n &= \sin \frac{\pi n}{2} \cos \frac{\pi n}{2}. \end{aligned}$$

Αιτιολογήστε τις απαντήσεις σας.

7. Έστω (b_n) ακολουθία πραγματικών αριθμών με $\liminf b_n = -5$ και $\limsup b_n = 10$. Εξετάστε αν συγκλίνει η ακολουθία

$$\gamma_n = \frac{b_n}{1 + \ln n}.$$

8. Έστω $\{q_n : n = 1, 2, \dots\}$ μια αρίθμηση των ρητών αριθμών του $(0, 1)$ (θυμηθείτε ότι το $\mathbb{Q} \cap (0, 1)$ είναι αριθμήσιμο). Δείξτε ότι κάθε $x \in [0, 1]$ είναι οριακό σημείο της ακολουθίας (q_n) .

9. Έστω $(a_n), (b_n)$ δύο φραγμένες ακολουθίες. Αν $a_n \rightarrow a$ δείξτε ότι:

$$\limsup(a_n + b_n) = a + \limsup b_n \quad \text{και} \quad \liminf(a_n + b_n) = a + \liminf b_n.$$

10. Κάθε φυσικός αριθμός n γράφεται μονοσήμαντα στη μορφή $n = 2^{s-1}(2k - 1)$, όπου $s, k \in \mathbb{N}$. Ορίζουμε

$$x_n = \frac{1}{s} + \frac{1}{k}.$$

Να βρεθούν όλα τα οριακά σημεία της (x_n) , το $\limsup x_n$ και το $\liminf x_n$.

11. Εξετάστε αν συγκλίνει ή αποκλίνει καθεμία από τις παρακάτω σειρές:

$$\begin{aligned}
 & (\alpha) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{10}}{10^k}, \quad (\beta) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k!)^2}{(2k)!}, \quad (\gamma) \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\sqrt{k}} \\
 & (\delta) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k - \sqrt{k}}{k^2 + 1}, \quad (\varepsilon) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}, \quad (\sigma\tau) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^2}, \quad x \in \mathbb{R} \\
 & (\zeta) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k + k}, \quad (\eta) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k k!}{k^k}, \quad (\theta) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k k!}{k^k}.
 \end{aligned}$$

12. Εξετάστε αν συγκλίνει ή αποκλίνει καθεμία από τις παρακάτω σειρές:

$$\begin{aligned}
 & (\alpha) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{k}, \quad (\beta) \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln k)^6}, \quad (\gamma) \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{\ln k} \\
 & (\delta) \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln k}, \quad (\varepsilon) \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k (\ln k)^2}, \quad (\sigma\tau) \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln k)^k} \\
 & (\zeta) \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln k)^{\ln k}}, \quad (\eta) \sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{(\ln(\ln k))^{\ln k}}, \quad (\theta) \sum_{k=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{k^p} \right), \quad p > 0.
 \end{aligned}$$

13. Εξετάστε για ποιές τιμές του $x \in \mathbb{R}$ συγκλίνουν οι σειρές

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \frac{x^k}{1 - x^k}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{x^2 - k^2}.$$

14. Προσδιορίστε το σύνολο των $x \in \mathbb{R}$ για τους οποίους συγκλίνει η δυναμοσειρά:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k x^k}{k}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{\sqrt{k}}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{(k+1)^2} \\
 & \sum_{k=0}^{\infty} k! x^k, \quad \sum_{k=0}^{\infty} k! x^{k!}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k^2}}{k!}.
 \end{aligned}$$

15. Έστω $(a_k), (b_k)$ δύο ακολουθίες πραγματικών αριθμών. Δείξτε ότι: αν οι σειρές $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$ και $\sum_{k=1}^{\infty} b_k^2$ συγκλίνουν, τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ συγκλίνει απολύτως.

16. Έστω (a_k) μια ακολουθία πραγματικών αριθμών. Δείξτε ότι: αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$ συγκλίνει και αν $p > 1/2$, τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{n^p}$ συγκλίνει απολύτως.

17. Προσδιορίστε τις τιμές των a, b, c για τις οποίες συγχλίνει η σειρά

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{a^k}{k^b (\ln k)^c}.$$

18. Προσδιορίστε τις τιμές των $a, b, c > 0$ για τις οποίες συγχλίνει η σειρά

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^a \sin\left(\frac{1}{k^b}\right) \cos\left(\frac{1}{k^c}\right).$$

19. Έστω (a_k) ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών με $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k > 1$. Δείξτε ότι η σειρά

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{a_k}}$$

συγχλίνει.

20. Έστω (a_k) ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών με την ιδιότητα $0 < a_k \leq a_{2k} + a_{2k+1}$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ αποκλίνει.

21. Έστω (a_n) ακολουθία στο \mathbb{R} . Υποθέτουμε ότι $|a_{n+1} - a_n| \leq \frac{1}{n^2}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι η (a_n) συγχλίνει.

22. Έστω (a_k) ακολουθία μη αρνητικών αριθμών. Δείξτε ότι: αν η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγχλίνει, τότε $\liminf (ka_k) = 0$.

23. Έστω $(a_k), (b_k)$ δύο ακολουθίες πραγματικών αριθμών. Δείξτε ότι: αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγχλίνει και αν η (b_k) είναι μονότονη και φραγμένη, τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ συγχλίνει.

24. Έστω $(a_k), (b_k)$ δύο ακολουθίες. Αν η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγχλίνει και η $\sum_{k=1}^{\infty} |b_k - b_{k+1}|$ συγχλίνει, δείξτε ότι η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ συγχλίνει.

25. Έστω (a_k) ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών με $a_k \rightarrow 0$. Δείξτε ότι υπάρχει υπακολουθία (a_{s_k}) της (a_k) με την ιδιότητα $\sum_{k=1}^{\infty} 3^k a_{s_k} < +\infty$.

26. Έστω $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. Δείξτε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

27. Εξετάστε αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι ομοιόμορφα συνεχείς.

1. $f : [2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{1}{x^2+4}$.
2. $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \sqrt{x} \ln x$.
3. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x \cos x$.
4. $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \sqrt{x}$.

28. Έστω $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση με την εξής ιδιότητα: για κάθε $0 < b < 1$ η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[b, 1]$. Δείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[0, 1]$.

29. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση, η οποία είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε διάστημα της μορφής $[r, q]$, όπου $r, q \in \mathbb{Q}$. Χρησιμοποιώντας το κριτήριο του Riemann δείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε διάστημα της μορφής $[a, b]$, όπου $a, b \in \mathbb{R}$.

30. Δείξτε ότι η συνάρτηση $h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$h(x) = \begin{cases} x & \text{αν } x \text{ ρητός} \\ 0 & \text{αν } x \text{ άρρητος} \end{cases}$$

δεν είναι Riemann ολοκληρώσιμη.

31. Δείξτε ότι υπάρχει μοναδική συνεχής συνάρτηση $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με την ιδιότητα

$$g(x) = 1 + \int_0^x g(t) dt$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Βρείτε την g .

32. Έστω $f : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f(0) = 0$. Δείξτε ότι

$$[f(x)]^2 \leq x \int_0^x [f'(t)]^2 dt$$

για κάθε $x \in [0, a]$.

33. Έστω $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Αν

$$a_n = \int_0^1 x^n f(x) dx,$$

δείξτε ότι $a_n \rightarrow 0$.

34. Έστω $g : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής και αύξουσα. Δείξτε ότι η $G : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $G(x) = \frac{1}{x} \int_0^x g(t) dt$ είναι αύξουσα.

35. Έστω $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = 0$. Υποθέτουμε ότι η f έχει συνεχή παράγωγο και ότι $0 < f'(x) \leq 1$ για κάθε $x \in [0, 1]$. Δείξτε ότι

$$\int_0^1 [f(x)]^3 dx \leq \left(\int_0^1 f(x) dx \right)^2.$$

36. Έστω $f : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση με συνεχή παράγωγο και $f(0) = 0$. Δείξτε ότι

$$\int_0^a |f(t)f'(t)| dt \leq \frac{a}{2} \int_0^a |f'(t)|^2 dt.$$

37. Έστω $f : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Ορίζουμε

$$F(x) = \int_1^x f\left(\frac{x}{t}\right) dt.$$

Βρείτε την F' .

38. Βρείτε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^4} \int_0^{x^2} e^t \sin t dt.$$

39. Υπολογίστε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{x+\sqrt{x}} \frac{t}{1+t^2} dt.$$

40. Ορίζουμε $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$G(x) = \int_0^x e^t \cos(x-t) dt.$$

Υπολογίστε την G' .

41. Ορίζουμε $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt + \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{1}{1+t^2} dt.$$

Δείξτε ότι η f είναι σταθερή.

42. Έστω $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ γνησίως αύξουσα συνάρτηση με συνεχή παράγωγο και $f(0) = 0$. Δείξτε ότι

$$\int_0^x f(t) dt + \int_0^{f(x)} f^{-1}(t) dt = xf(x)$$

για κάθε $x > 0$.

43. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

$$\int \frac{1}{(x+1)(x+2)} dx, \quad \int \frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x} dx, \quad \int \frac{x+1}{x^2 + 4x + 5} dx.$$

44. Έστω $a, b \in \mathbb{R}$ με $a \neq b$. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

$$\int \frac{x}{(x-a)^2(x-b)} dx, \quad \int \frac{x^2}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} dx, \quad \int \frac{x^2 - a^2}{x(x^2+a^2)^2} dx.$$

45. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

$$\int \cos^4 x dx, \quad \int \frac{\cos^4 x}{\sin x} dx, \quad \int \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx, \quad \int \frac{1}{4 + 3 \tan x} dx.$$

46. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

$$\int \frac{e^{2x} - 1}{e^x} dx, \quad \int \frac{1}{\sqrt{e^x + 1}} dx, \quad \int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx, \quad \int \frac{1}{\sqrt{e^{2x} + e^x + 1}} dx$$

47. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx, \quad \int \frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+4}} dx, \quad \int (x+1)\sqrt{x^2+1} dx.$$

48. Χρησιμοποιώντας ολοκλήρωση κατά μέρη υπολογίστε τα ολοκληρώματα

$$\int x \cos^2 x dx, \quad \int \frac{x}{\sin^2 x} dx, \quad \int \frac{\ln(x^2+1)}{x^2} dx.$$

49. Έστω $f_0 : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Για κάθε $k = 1, 2, \dots$ ορίζουμε $f_k : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f_k(x) = \int_0^x f_{k-1}(t) dt.$$

Δείξτε ότι

$$f_k(x) = \frac{1}{(k-1)!} \int_0^x f(t)(x-t)^{k-1} dt.$$

50. Έστω $f : [0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^\infty f(x) dx$ είναι πεπερασμένο. Δείξτε ότι $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$.

51. Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(a) = f(b) = 0$. Υποθέτουμε ότι η f' είναι συνεχής και ότι $\int_a^b [f(x)]^2 dx = 1$. Με ολοκλήρωση κατά παράγοντες δείξτε ότι

$$\int_a^b x f(x) f'(x) dx = -\frac{1}{2},$$

και, χρησιμοποιώντας το παραπάνω, δείξτε ότι

$$\left(\int_a^b x^2 [f(x)]^2 dx \right) \left(\int_a^b [f'(x)]^2 dx \right) \geq \frac{1}{4}.$$

52. Έστω $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Δείξτε ότι

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_a^b \left[\int_a^b (f(y) - f(x))(g(y) - g(x)) dy \right] dx \\ &= (b-a) \int_a^b f(x)g(x) dx - \left(\int_a^b f(x) dx \right) \left(\int_a^b g(x) dx \right). \end{aligned}$$

Αν οι f και g είναι αύξουσες, χρησιμοποιώντας το παραπάνω δείξτε ότι

$$\left(\int_a^b f(x) dx \right) \left(\int_a^b g(x) dx \right) \leq (b-a) \int_a^b f(x)g(x) dx.$$

53. Έστω $f : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση με συνεχή παράγωγο. Δείξτε ότι, για κάθε $k \in \mathbb{N}$,

$$f(k) = \int_k^{k+1} f(x) dx - \int_k^{k+1} (k+1-x)f'(x) dx.$$

54. (α) Έστω $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 x^{n-1} f(x) dx = 0.$$

(β) Έστω $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση με συνεχή παράγωγο. Δείξτε ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \int_0^1 x^{n-1} f(x) dx = f(1).$$

55. (α) Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση με συνεχή παράγωγο. Δείξτε ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{1/\sqrt{n}} n f(x) e^{-nx} dx = f(0).$$

(β) Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση με συνεχή παράγωγο. Δείξτε ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 n f(x) e^{-nx} dx = f(0).$$

56. Έστω $(a_k)_{k \geq 0}$ φραγμένη ακολουθία. Υποθέτουμε ότι η $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ αποκλίνει. Δείξτε ότι η ακτίνα σύγκλισης R της δυναμοσειράς $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ ισούται με 1.

57. Έστω $(a_k)_{k \geq 0}$ ακολουθία πραγματικών αριθμών. Υποθέτουμε ότι η $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ συγκλίνει υπό συνθήκη. Δείξτε ότι η ακτίνα σύγκλισης R της δυναμοσειράς $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ ισούται με 1.

58. Έστω $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f(0) = f(1) = 0$. Υποθέτουμε ότι $|f''(x)| \leq M$ για κάθε $x \in (0, 1)$. Δείξτε ότι $|f'(x)| \leq M/2$ για κάθε $x \in [0, 1]$.

59. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση. Αν $M_k = \sup\{|f^{(k)}(x)| : x \in \mathbb{R}\}$, $k = 0, 1, 2$, δείξτε ότι

$$M_1 \leq \sqrt{2M_0 M_2}.$$

60. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση για την οποία υπάρχει η $f''(0)$. Χρησιμοποιώντας κατάλληλο πολυώνυμο Taylor της f , δείξτε ότι

$$f''(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t) + f(-t) - 2f(0)}{t^2}.$$