Πανεπιστήμιο Αθηνών – Τμήμα Μαθηματικών

Θεωρία Μέτρου

27 Σεπτεμβρίου 2019

1. (α) Δείξτε ότι, μία συνάρτηση $f\colon X \to \mathbb{R}$, όπου $(X, \mathcal{A})$ ένας μετρήσιμος χώρος, είναι μετρήσιμη αν και μόνο αν $\{x \in X\colon f(x) < q\} \in \mathcal{A}$ για κάθε $q \in \mathbb{Q}$.

(β) Έστω $(X, \mathcal{A})$ ένας μετρήσιμος χώρος και $f_n\colon X \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, μία ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων στον X. Αποδείξτε, χρησιμοποιώντας μόνο τον ορισμό μιας μετρήσιμης συνάρτησης, ότι

$$\Big\{x \in X\colon \lim_{n\to\infty} f_n(x) \text{ υπάρχει στο } [-\infty, +\infty]\Big\} \in \mathcal{A}.$$

(γ) Έστω $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Δείξτε, χρησιμοποιώντας μόνο τον ορισμό του Borel συνόλου, ότι $f^{-1}(B)$ είναι Borel σύνολο για κάθε Borel υποσύνολο B του $\mathbb{R}$

2. Έστω $(X, \mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος και $\mu\colon \mathcal{A} \to [0. + \infty)$ μια συνολο-συνάρτηση με $\mu(\varnothing) = 0$, η οποία είναι πεπερασμένα προσθετική. Δείξτε, χρησιμοποιώντας μόνο τον ορισμό του μέτρου, ότι το μ είναι μέτρο αν και μόνο αν $\mu(A_n) \to 0$, καθώς $n \to \infty$, για κάθε ακολουθία $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συνόλων στην $\mathcal{A}$ τέτοια ώστε $A_n \supseteq A_{n+1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \varnothing$.

3. (α) Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος πιθανότητας και $f\colon X \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση με $\int_X f \,\mathrm{d}\mu \geqslant a$, όπου $a \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι $\mu\big(\{x \in X\colon f(x) \geqslant a\}\big) > 0$.

(β) Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος πιθανότητας και $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ τέτοια ώστε $\mu(A_i) \geqslant 1$ για κάθε $i \in \{1, \ldots, n\}$. Δείξτε ότι $A_1 \cap \cdots \cap A_n \neq \varnothing$.

[*Υπόδειξη*: Θεωρείστε την συνάρτηση $f := \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{A_i}$, όπου για ένα αυθαίρετο σύνολο $A \subseteq X$, $\mathbf{1}_A$ είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση του A: $\mathbf{1}_A = 1$ αν $x \in A$ και $\mathbf{1}_A = 0$ αν $x \notin A$.]

4. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $f\colon X \to [-\infty, +\infty]$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση.

(α) Δείξτε ότι $|f(x)| < +\infty$ για μ-σχεδόν κάθε $x \in X$.

(β) Έστω $f_n\colon x \to \mathbb{R}$ η συνάρτηση

$$f_n(x) := \begin{cases} f(x) & \text{αν } -n \leqslant f(x) \leqslant n \\ 0 & \text{αλλιώς,} \end{cases}$$

$n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι $f_n \to f$ μ-σχεδόν παντού και κατά μέσο.

5. (α) Έστω $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ η συνάρτηση $f(x) = x^{-1/2}$, αν $x > 0$, και $f(0) = 0$. Εξετάστε αν η f είναι ολοκληρώσιμη ως προς το μέτρο Lebesgue στον μετρήσιμο χώρο $\big([0,1], \mathcal{B}([0,1])\big)$. Αιτιολογείστε πλήρως την απάντησή σας.

(β) Έστω $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ η συνάρτηση

$$f_n(x) := \frac{n \sin x}{1 + n^2\sqrt{x}},$$

$n \in \mathbb{N}$. Βρείτε το $\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} f_n \,\mathrm{d}\lambda$, όπου λ το μέτρο Lebesgue στον μετρήσιμο χώρο $\big([0,1], \mathcal{B}([0,1])\big)$, με πλήρη αιτιολόγηση, ή αποδείξτε ότι το όριο αυτό δεν υπάρχει.

6. Έστω $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση, ως προς το μέτρο Lebesgue.

(α) Υπολογίστε το $\int_{\mathbb{R}} f(nx) \,\mathrm{d}x$, για $n \in \mathbb{N}$.

(β) Έστω $\alpha > 0$. Δείξτε ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} n^{-\alpha} |f(nx)| \,\mathrm{d}x < +\infty$$

και συμπεράνατε ότι $n^{-\alpha} f(nx) \to 0$ μ-σχεδόν παντού στο $\mathbb{R}$.

7. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $A_n, A \in \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{N}$, τέτοια ώστε $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n \vartriangle A) < +\infty$.

(α) Δείξτε ότι $\mathbf{1}_{A_n} \to \mathbf{1}_A$ μ-σχεδόν παντού (όπου $\mathbf{1}_B$ η χαρακτηριστική συνάρτηση του $B \subseteq X$, όπως στην Υπόδειξη της Άσκησης 3).

(β) Έστω επιπλέον $f_n, f \colon X \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, ολοκληρώσιμες συναρτήσεις, τέτοιες ώστε $f_n \to f$ κατά μέσο. Δείξτε ότι $\int_{A_n} f_n \,\mathrm{d}\mu \to \int_A f \,\mathrm{d}\mu$.

Καλή επιτυχία!