Πανεπιστήμιο Αθηνών

Τμήμα Μαθηματικών

Θεωρία Μέτρου

Εξέταση περιόδου Φεβρουαρίου 2018–19

1. Έστω $(X, \mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος και $f\colon X \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση.

(α) Αποδείξτε πλήρως ότι $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ για κάθε $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, δηλαδή για κάθε Borel υποσύνολο B του $\mathbb{R}$.

(β) Έστω και $\phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι η $\phi \circ f$ είναι μετρήσιμη συνάρτηση. **(1.25μ)**

2. Έστω $(X, \mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος και $f_n\colon X \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων. Αποδείξτε πλήρως ότι $\{x \in X : (f_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \text{ συγκλίνει}\} \in \mathcal{A}$. **(1μ)**

3. Έστω λ^* το εξωτερικό μέτρο Lebesgue στον $\mathbb{R}$.

(α) Δείξτε ότι αν $A, B \subseteq \mathbb{R}$ και $\lambda^*(B) = 0$, τότε $\lambda^*(A \cup B) = \lambda^*(A)$.

(β) Δείξτε ότι αν $A, B \subseteq \mathbb{R}$ και $\lambda^*(A \triangle B) = 0$, τότε $\lambda^*(A) = \lambda^*(B)$.

(γ) Δείξτε ότι ένα υποσύνολο A του $\mathbb{R}$ είναι Lebesgue μετρήσιμο αν και μόνο αν υπάρχουν ένα F_σ σύνολο F και ένα σύνολο Lebesgue μέτρου μηδέν N, τέτοια ώστε $A = F \cup N$. **(1.75μ)**

4. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου. Το μ λέγεται ημιπεπερασμένο αν για κάθε $A \in \mathcal{A}$ με $\mu(A) = +\infty$ υπάρχει $B \in \mathcal{A}$ με $B \subset A$, τέτοιο ώστε $0 < \mu(B) < +\infty$. Δείξτε ότι αν $(X, \mathcal{A}, \mu)$ είναι χώρος ημιπεπερασμένου μέτρου και $A \in \mathcal{A}$ έχει $\mu(A) = +\infty$, τότε για κάθε $M > 0$ υπάρχει $B \in \mathcal{A}$ με $B \subseteq A$, τέτοιο ώστε $M < \mu(B) < +\infty$. **(1μ)**

5. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $f_n\colon X \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων τέτοια ώστε $\sum_{n=1}^{\infty} \int_X |f_n| \,\mathrm{d}\mu < +\infty$. Δείξτε ότι η συνάρτηση $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ είναι καλά ορισμένη μ-σχεδόν παντού και ότι

$$\int_X f \,\mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n \,\mathrm{d}\mu. \qquad \textbf{(1μ)}$$

6. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $f, f_n\colon X \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, ολοκληρώσιμες συναρτήσεις τέτοιες ώστε $f_n \to f$, καθώς $n \to \infty$, μ-σχεδόν παντού. Δείξτε ότι $f_n \to f$ κατά μέσο αν και μόνο αν $\int_X |f_n| \,\mathrm{d}\mu \to \int_X |f| \,\mathrm{d}\mu$. **(1μ)**

7. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου, $f, g\colon X \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις και $A \in \mathcal{A}$ με $\mu(A) < +\infty$ και τέτοιο ώστε $\int_A f \,\mathrm{d}\mu = \int_A g \,\mathrm{d}\mu$. Δείξτε ότι τότε είτε $f = g$ μ-σχεδόν παντού στο A, είτε υπάρχει $B \in \mathcal{A}$ με $B \subset A$, τέτοιο ώστε $\int_B f \,\mathrm{d}\mu < \int_B g \,\mathrm{d}\mu$. **(1μ)**

8. Έστω $f\colon [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ Lebesgue ολοκληρώσιμη συνάρτηση και έστω $\varphi\colon [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ η συνάρτηση $\varphi(t) := \int_{[0,+\infty)} f(x) e^{-tx} \,\mathrm{d}\lambda(x)$, $t \geqslant 0$, όπου λ το μέτρο Lebesgue.

(α) Δείξτε ότι η φ είναι συνεχής και $\lim_{t\to\infty} \varphi(t) = 0$.

(β) Δείξτε ότι αν η συνάρτηση $g(x) = x f(x)$, $x \in [0, +\infty)$, είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη, τότε η φ είναι παραγωγίσιμη και βρείτε την παράγωγό της. **(1.5μ)**

9. Έστω $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ Borel μετρήσιμη συνάρτηση, ολοκληρώσιμη ως προς το μέτρο Lebesgue λ. Έστω $g\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ η συνάρτηση $g(x) := \int_{[x,1]} f(y) y^{-1} \,\mathrm{d}\lambda(y)$ για $x > 0$ και με το $g(0)$ αυθαίρετα ορισμένο (έστω $g(0) = 0$). Δείξτε λεπτομερώς ότι η g είναι ολοκληρώσιμη και ότι $\int_{[0,1]} f \,\mathrm{d}\lambda = \int_{[0,1]} g \,\mathrm{d}\lambda$. **(1μ)**

10. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $f, f_n\colon X \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, ολοκληρώσιμες συναρτήσεις τέτοιες ώστε

$$\int_X |f_n - f| \,\mathrm{d}\mu \leqslant 2^{-n},$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι $f_n \to f$, καθώς $n \to \infty$, μ-σχεδόν παντού. **(1.5μ)**

Καλή επιτυχία!