Πανεπιστήμιο Αθηνών – Τμήμα Μαθηματικών

Θεωρία Μέτρου

Εξέταση περιόδου Σεπτεμβρίου 2017–18

1. Έστω $\mathbb{Q}_0 := \mathbb{Q} \cap [0,1]$.
(α) Δείξτε ότι, για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει ακολουθία ανοικτών διαστημάτων $I_1, I_2, \ldots$, τέτοια ώστε $\mathbb{Q}_0 \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ και $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(I_n) < \varepsilon$.
(β) Αν $I_1, \ldots, I_m$ είναι μια πεπερασμένη οικογένεια ανοικτών διαστημάτων τέτοια ώστε $\mathbb{Q}_0 \subseteq \bigcup_{n=1}^{m} I_n$, τότε $\sum_{n=1}^{m} \lambda(I_n) \geqslant 1$. (Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε ότι κάθε ανοικτό σύνολο στον $\mathbb{R}$ γράφεται σαν ένωση ξένων διαστημάτων.) **(1.5μ)**

2. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου. Ορίζουμε $\mu^* \colon \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ από την

$$\mu^*(A) = \sup\{\mu(B) \colon B \subseteq A,\ B \in \mathcal{A},\ \mu(B) < +\infty\}.$$

(α) Δείξτε ότι το μ^* είναι μέτρο στον μετρήσιμο χώρο $(X, \mathcal{A})$.
(β) Δείξτε ότι αν το μ είναι σ-πεπερασμένο τότε $\mu^* = \mu$.
(γ) Βρείτε το μ^* αν $X \neq \varnothing$ και μ είναι το μέτρο με $\mu(\varnothing) = 0$ και $\mu(A) = +\infty$ για κάθε άλλο $A \in \mathcal{A}$. **(2μ)**

3. (α) Δείξτε ότι κάθε μονότονη συνάρτηση είναι Borel μετρήσιμη.
(β) Έστω $(X, \mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος και $f_n \colon X \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων. Δείξτε λεπτομερώς ότι το σύνολο $\{x \in X \colon \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ υπάρχει στο $[-\infty, +\infty]\}$ είναι μετρήσιμο. **(1.7μ)**

4. (α) Υπολογίστε το όριο

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\infty} \frac{n \sin(x/n)}{x(1+x^2)}\, \mathrm{d}x,$$

με πλήρη αιτιολόγηση.
(β) Έστω $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η συνάρτηση με $f(x) = x^{-p}$ αν $x \in (0,1)$ και $f(x) = 0$ αλλού, όπου $p < 1$. Έστω και $\mathbb{Q} = \{q_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ μία αρίθμηση των ρητών. Δείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} f(x - q_n)$ συγκλίνει για Lebesgue-σχεδόν κάθε x στο $\mathbb{R}$ και ότι είναι ολοκληρώσιμη ως προς το μέτρο Lebesgue στο $\mathbb{R}$. **(1.8μ)**

5. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $f, f_n \colon X \to [0, +\infty]$, $n \in \mathbb{N}$, μετρήσιμες συναρτήσεις. Δείξτε ότι, αν $f_n \leq f$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $f_n \to f$ μ-σχεδόν παντού, τότε $\int_X f_n \,\mathrm{d}x \to \int_X f \,\mathrm{d}x$, καθώς $n \to \infty$. **(1μ)**

6. (α) Έστω $f \colon [0,1] \to \mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι, για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $M = M(\varepsilon) \in (0, +\infty)$ τέτοιο ώστε $\lambda(\{x \in [0,1] \colon |f(x)| > M\}) < \varepsilon$, όπου λ το μέτρο Lebesgue στο $[0,1]$.
(β) Έστω $f_n \colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, Lebesgue μετρήσιμες συναρτήσεις. Δείξτε ότι υπάρχει ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ θετικών αριθμών τέτοια ώστε

$$\frac{f_n(x)}{a_n} \to 0,$$

για Lebesgue-σχεδόν κάθε x στο $[0,1]$. (Χρησιμοποιείστε το (α) για κατάλληλη ακολουθία από ε_n.) **(2μ)**

7. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος πεπερασμένου μέτρου και $f, f_n \colon X \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, μετρήσιμες συναρτήσεις. Για κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις εξετάστε αν είναι αληθής (Α) ή ψευδής (Ψ). Αιτιολογείστε πλήρως τις απαντήσεις σας, δίνοντας, κατά περίπτωση, απόδειξη ή αντιπαράδειγμα.
(α) Αν $f_n \to f$ κατά μέσο τότε $f_n \to f$ κατά μέτρο.
(β) Αν $f_n \to f$ κατά μέτρο τότε $f_n \to f$ κατά μέσο.
(γ) Αν $f_n \to f$ σχεδόν παντού τότε $f_n \to f$ κατά μέτρο. **(2μ)**

Καλή επιτυχία!