Πανεπιστήμιο Αθηνών – Τμήμα Μαθηματικών
Τελική Εξέταση Απειροστικού Λογισμού Ι

Εαρινό Εξάμηνο

22 Ιουνίου 2020
2ο κλιμάκιο

1. (2 μον.) Έστω A μη κενό και άνω φραγμένο υποσύνολο των πραγματικών αριθμών και $a \in \mathbb{R}$. Χρησιμοποιώντας μόνο τον ορισμό του ελάχιστου άνω φράγματος sup ενός συνόλου, αποδείξτε ότι $a = \sup A$ αν και μόνο αν

(α) το a είναι άνω φράγμα του A και

(β) για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $b \in A$ με $b > a - \varepsilon$.

2. (3 μον.) Να εξεταστούν ως προς την σύγκλιση οι παρακάτω ακολουθίες και όπου υπάρχει το όριο να βρεθεί. Αιτιολογείστε πλήρως τις απαντήσεις σας.

$$a_n = \frac{(n!)^2 3^n}{(2n)!} \qquad b_n = \left(\sqrt{n^2+n} - n\right)^n \qquad c_n = \frac{\sin(n^2)}{n^2}.$$

3. (2 μον.) Εξετάστε αν είναι σωστές ή λάθος οι παρακάτω προτάσεις. Να αιτιολογήσετε πλήρως την απάντησή σας (απόδειξη ή παράδειγμα/αντιπαράδειγμα αντίστοιχα).

(α) Αν a_n είναι ακολουθία ρητών αριθμών και $a_n \to \sqrt{2}$, τότε η ανισότητα $a_n > 2$ μπορεί να ισχύει για άπειρους όρους της ακολουθίας.

(β) Αν $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι συγκλίνουσα ακολουθία πραγματικών αριθμών και $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη ακολουθία πραγματικών αριθμών, τότε η ακολουθία $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει.

4. (3 μον.)

(α) Έστω $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση τέτοια ώστε $|f(x)| = 1$ για κάθε $x \in [a,b]$. Δείξτε ότι η f είναι σταθερή.

(β) Έστω $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις τέτοιες ώστε $|f(x)| = |g(x)|$ για κάθε $x \in [a,b]$. Δείξτε ότι, αν $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [a,b]$, τότε είτε $f = g$ είτε $f = -g$ (δηλαδή είτε $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in [a,b]$, είτε $f(x) = -g(x)$ για κάθε $x \in [a,b]$).

5. (2 μον.) Έστω $f\colon (-1,1) \to \mathbb{R}$ συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν $M \in (0,+\infty)$ και $\rho > 1$ τέτοια ώστε $|f(x) - f(y)| \leq M|x-y|^\rho$ για κάθε $x, y \in (-1,1)$. Δείξτε ότι (i) η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x \in (-1,1)$ και (ii) ότι η f είναι σταθερή.