Απειροστικός Λογισμός Ι – Πρόοδος
1 Δεκεμβρίου 2018

Ονοματεπώνυμο: ....

Αριθμός Μητρώου: ....

1. (1.25+0.25+1 μον.)
(α) Έστω A μη κενό, άνω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$, και $x \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.

(α.1) Το x είναι το supremum του A.

(α.2) Το x είναι άνω φράγμα του A, και για κάθε $\mu < x$ υπάρχει $a \in A$ με $\mu < a \leq x$.

(β) Είναι δυνατόν στο (α.2) να εξασφαλίσουμε ότι $\mu < a < x$;

(γ) Έστω $n \in \mathbb{N}$ και $a_1, \ldots, a_n > 0$. Δείξτε ότι $(1 + a_1) \cdots (1 + a_n) \geq 1 + a_1 \cdots a_n$.

2. (3 μον.)
Να βρεθούν τα sup, inf, max και min (αν αυτά υπάρχουν) των συνόλων

$$A = \left\{ \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^m} : n, m \in \mathbb{N} \right\}, \quad B = \left\{ (-1)^{n+1} + \frac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$\text{και} \quad \Gamma = \{ x \in \mathbb{Q} : 1 \leq x \leq \sqrt{2} \}.$$

3. (3+1 μον.)
(α) Να εξεταστούν ως προς τη σύγκλιση οι ακολουθίες

$$\alpha_n = \frac{4^n \, n!}{n^n}, \quad \beta_n = \left(\sqrt[n]{2n} - \frac{1}{2} \right)^n, \quad \gamma_n = \left(1 + \frac{2}{n} \right)^{3n},$$

$$\delta_n = \sqrt[n]{\frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n}} \quad \text{και} \quad \varepsilon_n = \frac{1}{n!} + \frac{\sqrt{2}}{(n+1)!} + \cdots + \frac{\sqrt{n+1}}{(2n)!}.$$

(β) Υπολογίστε το όριο, αν υπάρχει, της ακολουθίας (a_n) που ορίζεται αναδρομικά με $a_1 = \frac{1}{2}$ και $8a_{n+1} = a_n + 7$ για $n \in \mathbb{N}$.

4. (1.25+0.25 μον.)
Δείξτε ότι κάθε συγκλίνουσα ακολουθία είναι φραγμένη. Ισχύει το αντίστροφο;

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!