ΘΕΜΑ 1ο (2-μονάδες)

α) Διατυπώστε και αποδείξτε την αρχή της μαθηματικής επαγωγής

β) Υπολογίστε (στην περίπτωση που υπάρχει) το supremum, infimum, μέγιστο και ελάχιστο στοιχείο του συνόλου $A=\{\frac{1}{n^2}+(-1)^n : n\neq 0,\ n\in\mathbb{N}\}$

γ) Αν $\alpha,\beta\geq 0$ και $n\in\mathbb{N}$, αποδείξτε ότι $\frac{\alpha^n+\beta^n}{2}\geq\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^n$

ΘΕΜΑ 2ο (2-μονάδες)

α) Αποδείξτε ότι κάθε αύξουσα και άνω φραγμένη ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ πραγματικών αριθμών συγκλίνει.

β) Εστω η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με $a_1=1$ και $a_{n+1}=\sqrt{3a_n}$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 1$. Αποδείξτε ότι η $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στο 3.

γ) Εξετάστε ως προς τήν σύγκλιση τις ακολουθίες

$$\left(\frac{1+(-1)^n}{5}\right)_{n\in\mathbb{N}}, \quad \left(\frac{1+(-1)^n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}, \quad \left(\frac{n^2}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

ΘΕΜΑ 3º (2-μονάδες)

α) Έστω $f, g : [0,1] \longrightarrow [0,+\infty)$ συνεχείς πού ικανοποιούν

$$\sup_{0\le x\le 1} f(x) = \sup_{0\le x\le 1} g(x)$$

Αποδείξτε ότι υπάρχει $x_0 \in [0,1]$ έτσι ώστε $f(x_0)=g(x_0)$.

β) Εξετάστε ως προς τὴν συνέχεια τὴν συνάρτηση

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ μέ } f(x) = \begin{cases} x & \text{αν } x\in\mathbb{Q} \\ x^2 & \text{αν } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases} \quad (\mathbb{Q} \text{ τὸ σύνολο των ρητών})$$

ΘΕΜΑ 4ο (2-μονάδες)

α) Δείξτε ότι η εξίσωση $e^x=1-x$ έχει ακριβώς μία λύση στο $\mathbb{R}$. Βρείτε αυτή την λύση.

β) Έστω $f:(0,+\infty)\to[0,+\infty)$ διαφορίσιμη ώστε $f'(x)>f(x)$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$ και $f(x_0)=0$ για κάποιο $x_0\in(0,+\infty)$. Δείξτε ότι $f(x)>0$ για κάθε $x>x_0$.

ΘΕΜΑ 5ο (2-μονάδες)

α) Έστω $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ συνεχής έτσι ώστε $x^2+(f(x))^2=1$ γιά κάθε $x\in[-1,1]$.
Δείξτε ότι $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ γιά κάθε $x\in[-1,1]$ ή $f(x)=-\sqrt{1-x^2}$ γιά κάθε $x\in[-1,1]$.

β) Έστω $f:(-1,1)\to\mathbb{R}$ διαφορίσιμη έτσι ώστε $x^2+(f'(x))^2=1$ γιά κάθε $x\in(-1,1)$. Δείξτε ότι η f είναι γνήσια αύξουσα ή γνήσια φθίνουσα.