ΘΕΜΑΤΑ ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ Ι

Ημερομηνία εξέτασης 26-Ιουνίου 2015

ΘΕΜΑ 1º (2-μονάδες). Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ $A \neq \emptyset$, και $\langle x_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία πραγματικών αριθμών ώστε $x_n \to x \in \mathbb{R}$. i) Δείξτε ότι εάν x_n κάτω φράγμα του A γιά κάθε $n\in\mathbb{N}$, τότε τό x είναι κάτω φράγμα του A. Υπαρχει περίπτωση τό x νά είναι $\inf A$; Δικαιολογείστε τήν απάντηση σας με ενα παράδειγμα. ii) Εάν x_{2n} άνω φράγμα του A καί x_{2n+1} κάτω φράγμα του A γιά κάθε $n\in\mathbb{N}$, τί συμπεραίνεται γιά τό A, αιτιολογείστε τήν απάντηση σας.

ΘΕΜΑ 2º (2-μονάδες). i) Έστω $x\in(0,\pi/2)$. Θεωρούμε τήν ακολουθία $a_n = \eta\mu(\eta\mu(\eta\mu(\cdots(\eta\mu x))))$ $n\in\mathbb{N}$, οπου τό n δηλώνει πόσες φορές έχει εφαρμοσθεί ή συνάρτηση ημ. Δείξτε ότι ή $\langle a_n\rangle_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει καί εύρατε τό όριο της. Υπόδειξη: χρησιμοποιήστε τήν ανισότητα $\eta\mu x < x$.

ii) Δίδεται ή συνάρτηση $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\begin{cases} x, & x \text{ ρητός} \\ 1-x, & x \text{ άρρητος}\end{cases}$. Βρείτε τά σημεία συνεχείας καί ασυνεχείας της f.

iii) Έστω $A\subseteq\mathbb{R}$ καί $A\neq\emptyset$. Έστω δύο ακολουθίες πραγματικών αριθμών $\langle x_n\rangle_{n\in\mathbb{N}}$, $\langle y_n\rangle_{n\in\mathbb{N}}$, έτσι ώστε x_n δεν είναι άνω φράγμα του A, ενώ y_n είναι άνω φράγμα του A γιά κάθε $n\in\mathbb{N}$. Δείξτε ότι εάν οι ακολουθίες $\langle x_n\rangle_{n\in\mathbb{N}}$, $\langle y_n\rangle_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνουν στόν ίδιο πραγματικό αριθμό s, τότε $s=\sup A$.

ΘΕΜΑ 3º (2-μονάδες). i) Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχής καί 1-1. Δείξτε ότι η f είναι ή γνήσια αύξουσα ή γνήσια φθίνουσα. ii) Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχής καί $f|_{\mathbb{Q}}$, ο περιορισμός της f στούς ρητούς είναι γνήσια αύξουσα. Δείξατε ότι καί η ίδια η f είναι αύξουσα.

iii) Έστω $I=[\alpha,b]$ καί $f:I\to I$ συνεχής. Δείξτε ότι υπάρχει $x_0\in I$ ώστε $f(x_0)=x_0$.

ΘΕΜΑ 4º (2-μονάδες). Έστω $f:(\alpha,\beta)\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση καί $x_0\in(\alpha,\beta)$. Υποθέτουμε ότι το x_0 είναι τοπικό ελάχιστο. Να δειχθεί ότι i) $f'(x_0)=0$

ii) Εαν υπάρχει η $f''(x_0)$ τότε $f''(x_0)\geq 0$.

ΘΕΜΑ 5º (2-μονάδες) i) Έστω $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση με $|f'(x)|<\sqrt{x}$ γιά κάθε $x>0$. Να δειχθεί ότι $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}=0$. ii) Να ορισθεί η συνάρτηση $g(x)=\text{τοξεφ}\,x$ $x\in\mathbb{R}$, καί νά υπολογισθεί η $g'(x_0)$, $x_0\in\mathbb{R}$.

ΘΕΜΑ 6º (2-μονάδες). Εξετάστε ως πρός τήν σύγκλιση τις παρακάτω ακολουθίες καί προσδιορίστε τό όριο, (αν υπάρχει).

(i) $a_n=(\sqrt[n]{n}-\sqrt[n]{5})^n$

(iii) $\gamma_n=\frac{3^n n!}{n^n}$

(ii) $\beta_n=\frac{2^n n!}{n^n}$

(iv) $\delta_n=\frac{n!}{5^n}f\left(\frac{5^n}{n!}\right)$, οπου $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(0)=0$ καί $f'(0)=10$.

Σημ. Μπορείτε νά ασχοληθείτε με όποια από τά παραπάνω θέματα επιλέξετε. Η βαθμολόγηση γίνεται με άριστα τό 10 (δέκα).