ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι

29 Φεβρουαρίου 2012

Θέμα 1. (2 μονάδες)
Εξετάστε για τον κάθε ένα από τους παρακάτω ισχυρισμούς αν είναι σωστός ή λάθος και αιτιολογείστε την απάντηση σας.
α) Αν $A \subset \mathbb{R}$ μη κενό και φραγμένο απειροσύνολο, τότε $\inf A < x < \sup A$ για κάθε $x \in A$.
β) Αν μια ακολουθία (α_n) συγκλίνει στο 1 τότε και η ακολουθία (α_n^n) συγκλίνει στο 1.
γ) Αν $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο (α, β) και $f(\alpha) = f(\beta)$, τότε υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ ώστε $f'(\xi) = 0$.
δ) Αν A μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και $f : A \to \mathbb{R}$ ώστε $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in A$, τότε η f είναι σταθερή.

Θέμα 2.(1,5 μονάδα)
Εστω ακολουθία (α_n) ώστε $\lim \alpha_n = 10$. Θέτουμε
$A_1 = \{n \in \mathbb{N} : \alpha_n < 9,9\}$,
$A_2 = \{n \in \mathbb{N} : 9,9999 < \alpha_n < 10,00001\}$,
$A_3 = \{n \in \mathbb{N} : \alpha_n \geq 10,1\}$ και
$A_4 = \{n \in \mathbb{N} : \alpha_n \leq 10\}$.
Για κάθε $j = 1, 2, 3, 4$ εξετάστε ποιοί από τους επόμενους ισχυρισμούς είναι σωστοί:
i) Το σύνολο A_j είναι πεπερασμένο.
ii) Το σύνολο $\mathbb{N} \setminus A_j$ είναι πεπερασμένο.
iii) Τα δεδομένα δεν είναι αρκετά για να προκύψει το i) ή το ii).
Αιτιολογείστε τους ισχυρισμούς σας.

Θέμα 3.(1,5 μονάδα)
α) Να βρεθούν, αν υπάρχουν, τα όρια των ακολουθιών
$\alpha_n = \sqrt[n]{\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}}$, $\beta_n = (-1)^n \frac{5^n + n}{7^n - n}$, $\gamma_n = (\sqrt[n]{5} + \frac{1}{2^n}) n\ell n(1 + \frac{1}{n})$.
β) Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση την ακολουθία (α_n), με $\alpha_1 = \sqrt{6}$ και $\alpha_{n+1} = \sqrt{6 + \alpha_n}$ για $n = 1, 2, ...$

Θέμα 4.(2,5 μονάδες)
Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x^2$ αν x είναι άρρητος και $f(x) = x^3$ αν x είναι ρητός.
α) Εξετάστε αν η f είναι 1-1.
β) Να βρείτε τα σημεία στα οποία η f είναι συνεχής.
γ) Να βρείτε την παράγωγο της f στα σημεία στα οποία είναι παραγωγίσιμη.

Θέμα 5.(1,5 μονάδα)
α) Έστω δύο συνεχείς συναρτήσεις $f, g : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ ώστε $f(x) > g(x)$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $c > 0$ ώστε $f(x) > g(x) + c$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.
β) Ισχύει το α) αν το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων είναι το (α, β);

Θέμα 6.(2 μονάδες)
α) Έστω $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι η εξίσωση $5\alpha x^4 + 3\beta x^2 + 2\gamma x = \alpha + \beta + \gamma$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.
β)Αποδείξτε ότι $\frac{\ell nx}{x} \leq \frac{1}{e}$ για κάθε $x > 0$ και συγκρίνατε τους αριθμούς e^π και π^e.

Καλή επιτυχία