Απειροστικός Λογισμός Ι – 27 Φεβρουαρίου 2009

Θέμα 1 (1.5 μον.) (α) Να βρεθούν, αν υπάρχουν, τα max, min, sup και inf του συνόλου

$$A = \left\{ 1 + \frac{1}{n^2+1} : n = 1, 2, \dots \right\} \cup [2, 5].$$

Αιτιολογήστε την απάντησή σας.
(β) Έστω $\emptyset \neq B \subseteq (0, +\infty)$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε $x \in B$ υπάρχει $y \in B$ ώστε $y < \frac{x}{2}$. Δείξτε ότι $\inf(B) = 0$.

Θέμα 2 (2.5 μον.) (α) Υπολογίστε τα όρια των παρακάτω ακολουθιών:

$$\alpha_n = \sqrt{n^2 + 2n} - n, \qquad \beta_n = \frac{n^3}{2^n}, \qquad \gamma_n = \frac{\text{συν}(n^{10})}{\sqrt{n}}.$$

(β) Δείξτε ότι $(n!)^2 \geq n^n$ για κάθε $n = 1, 2, \dots$. Στη συνέχεια, δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty.$$

Θέμα 3 (1 μον.) Αν (a_n) είναι μια ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών, δείξτε ότι

$$a_n \to 0 \quad \text{αν και μόνο αν} \quad \frac{1}{a_n} \to +\infty.$$

Θέμα 4 (1.5 μον.) (α) Διατυπώστε και αποδείξτε την αρχή της μεταφοράς για τη συνέχεια συνάρτησης σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της.
(β) Έστω $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις. Δείξτε ότι: αν $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{Q}$, τότε $f(y) = g(y)$ για κάθε $y \in \mathbb{R}$.

Θέμα 5 (1 μον.) Έστω $f : [0, 1] \to [0, 3]$ συνάρτηση *συνεχής* και *επί*. Δείξτε ότι υπάρχει $\xi \in [0, 1]$ ώστε

$$f(\xi) = \xi^2 + 1.$$

Θέμα 6 (1.5 μον.) Έστω $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι

$$f(0) = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 1.$$

Δείξτε ότι η f παίρνει ελάχιστη τιμή: υπάρχει $x_0 \in [0, +\infty)$ ώστε $f(x_0) \leq f(x)$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$.

Είναι σωστό ότι κάθε συνάρτηση με τις παραπάνω ιδιότητες παίρνει μέγιστη τιμή;

Θέμα 7 (2 μον.) (α) Υπολογίστε τα όρια

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x}, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{e^x}.$$

(β) Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(y) = \begin{cases} e^{-1/y} & \text{αν } y > 0 \\ 0 & \text{αν } y \leq 0 \end{cases}$. Εξετάστε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Αν ναι, εξετάστε αν η $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής.

Θέμα 8 (2 μον.) (α) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνάρτηση με $f(0) = f'(0) = 0$. Δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{3^n} f\left(\frac{3^n}{n!}\right) = 0.$$

(β) Έστω $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής, δύο φορές παραγωγίσιμη στο (a, b). Αν $g(a) = g(b) = 5$ και $g''(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (a, b)$, δείξτε ότι: είτε «$g(x) < 5$ για κάθε $x \in (a, b)$» ή «$g(x) > 5$ για κάθε $x \in (a, b)$».

Καλή Επιτυχία!