Απειροστικός Λογισμός Ι – 5ο Τεστ
8 Ιανουαρίου 2018

Ονοματεπώνυμο: ....

Αριθμός Μητρώου: ....

1. (**4 μον.**) Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς: σημειώστε απλώς (Α) αν θεωρείτε ότι η πρόταση είναι αληθής ή (Ψ) αν θεωρείτε ότι η πρόταση είναι ψευδής.

(α) Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο (a,b), τότε η f είναι συνεχής στο (a,b).

(β) Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ και αν $f(0) = f'(0) = 0$, τότε $\lim\limits_{n\to\infty} nf(1/n) = 0$.

(γ) Αν η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο 0, τότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε η f να είναι συνεχής στο $(-\delta, \delta)$.

(δ) Αν η $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 \in (a,b)$ τότε

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h^2) - f(x_0)}{h} = 0.$$

2. (**3 μον.**) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνάρτηση με την ιδιότητα: $f(x+y) = f(x) + f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.
(α) Αποδείξτε ότι $f(0) = 0$.
(β) Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 αποδείξτε ότι είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f'(x) = f'(0)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
(γ) Αποδείξτε ότι υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ ώστε $f(x) = cx$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

3. (2 μον.) Εξετάστε αν η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & , \text{αν } x\neq 0 \\ 0 & , \text{αν } x=0 \end{cases}$. είναι παραγωγίσιμη στο 0.

4. (2 μον.) Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο σημείο a και (x_n), (y_n) ακολουθίες τέτοιες ώστε $x_n<a<y_n$ για κάθε $n\geqslant 1$ και $\lim x_n=\lim y_n=a$. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(y_n)-f(x_n)}{y_n-x_n}=f'(a).$$

Απειροστικός Λογισμός Ι – 5ο Τεστ
11 Ιανουαρίου 2018

Ονοματεπώνυμο: ....

Αριθμός Μητρώου: ....

1. (**4 μον.**) Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς: σημειώστε απλώς (Α) αν θεωρείτε ότι η πρόταση είναι αληθής ή (Ψ) αν θεωρείτε ότι η πρόταση είναι ψευδής.

(α) Αν $f'(x) \geqslant 0$ για κάθε $x \in [0, \infty)$ και $f(0) = 0$, τότε $f(x) \geqslant 0$ για κάθε $x \in [0, \infty)$.

(β) Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $[a, b]$ και παίρνει τη μέγιστη τιμή της στο $x_0 = a$, τότε $f'(a) = 0$.

(γ) Υπάρχει συνάρτηση $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής στο $(0, 1)$ αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη στα σημεία $x_n = \frac{1}{n}$, $n \geqslant 2$.

(δ) Αν η $f : A = (-\infty, 0) \cup (0, \infty) \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο A και $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in A$ τότε η f είναι σταθερή.

2. (**3 μον.**) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνάρτηση η οποία δεν είναι παντού ίση με μηδέν, με την ιδιότητα: $f(x + y) = f(x)f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.
(α) Αποδείξτε ότι $f(0) = 1$.
(β) Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 αποδείξτε ότι είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f'(x) = f'(0)f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
(γ) Αποδείξτε ότι υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ ώστε $f(x) = e^{cx}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

3. (**2 μον.**) Εξετάστε αν η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ αν $x \neq 0$ και $f(0) = 1$ είναι παραγωγίσιμη στο 0.

4. (**2 μον.**) Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ με συνεχή παράγωγο στο $[a, b]$ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο (a, b). Αν $f(a) = f(b)$ και $f'(a) = f'(b) = 0$, αποδείξτε ότι υπάρχουν $x_1, x_2 \in (a, b)$ τέτοια ώστε $x_1 \neq x_2$ και

$$f''(x_1) = f''(x_2).$$