Απειροστικός Λογισμός Ι – 4ο Τεστ
4 Δεκεμβρίου 2017

Ονοματεπώνυμο: ....

Αριθμός Μητρώου: ....

1. **(4 μον.)** Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς: σημειώστε απλώς (Α) αν θεωρείτε ότι η πρόταση είναι αληθής ή (Ψ) αν θεωρείτε ότι η πρόταση είναι ψευδής.

(α) Υπάρχει συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ που είναι συνεχής στο 0 και ασυνεχής σε όλα τα άλλα σημεία.

(β) Αν η $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής και $f(q)=0$ για κάθε ρητό $q\in(a,b)$, τότε $f(x)=0$ για κάθε $x\in(a,b)$.

(γ) Αν η $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής, και αν $f(0)=0$ και $f(1)=1$, τότε το σύνολο τιμών της f είναι το $[0,1]$.

(δ) Αν οι $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι συνεχείς στο 0 και $f(0)<g(0)$, τότε υπάρχει $\delta>0$ τέτοιος ώστε $f(x)<g(x)$ για κάθε $x\in(-\delta,\delta)$.

2. **(3 μον.)** Δείξτε ότι η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\begin{cases} x & , \text{ αν } x\in\mathbb{Q} \\ x^2 & , \text{ αν } x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$ είναι συνεχής μόνο στα σημεία $0,1$.

3. (**2 μον.**) Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν $x_n \in [0,1]$ ώστε $f(x_n) \to 0$. Τότε, υπάρχει $x_0 \in [0,1]$ ώστε $f(x_0) = 0$.

4. (**2 μον.**) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ και $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. Δείξτε ότι $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

Απειροστικός Λογισμός Ι – 4ο Τεστ
7 Δεκεμβρίου 2017

Ονοματεπώνυμο: ....

Αριθμός Μητρώου: ....

1. (4 μον.) Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς: σημειώστε απλώς (Α) αν θεωρείτε ότι η πρόταση είναι αληθής ή (Ψ) αν θεωρείτε ότι η πρόταση είναι ψευδής.

(α) Αν η $f:(0,1)\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής, τότε είναι φραγμένη.

(β) Αν η $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής στο x_0 και $f(x_0)=1$, τότε υπάρχει $\delta>0$ ώστε: για κάθε $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$ ισχύει $f(x)>\frac{1}{2}$.

(γ) Αν η $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής σε κάθε άρρητο $\xi\in\mathbb{R}$, τότε είναι συνεχής σε κάθε $x\in\mathbb{R}$.

(δ) Υπάρχει αύξουσα συνάρτηση $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ η οποία είναι ασυνεχής σε άπειρα το πλήθος σημεία.

2. (3 μον.) Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & , \text{ αν } x\in\mathbb{Q} \\ 2x & , \text{ αν } x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$ είναι συνεχής μόνο στο σημείο 1.

3. (**2 μον.**) Έστω $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με την ιδιότητα $f(x) \in \mathbb{Z}$ για κάθε $x \in (0,1)$. Αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή συνάρτηση.

4. (**2 μον.**) Έστω $f : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ συνεχής συνάρτηση. Αν $f(x) \neq x$ για κάθε $x \geqslant 0$, δείξτε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.