

Απειροστικός Λογισμός Ι

Εξετάσεις 24 Φεβρουαρίου 2004

1. (ι) Έστω $X \neq \emptyset$ φραγμένο υποσύνολο του \mathbb{R} και $a \in \mathbb{R}$ ένα άνω φράγμα του X . Αποδείξτε πλήρως ότι

$a = \sup X$ αν και μόνον αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $x \in X$ ώστε $a - \varepsilon < x$.

(ii) Έστω $\emptyset \neq A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$ με B άνω φραγμένο. Αποδείξτε ότι αν για κάθε $b \in B$ υπάρχει $a \in A$ με $a \geq b$ τότε $\sup A = \sup B$. (1,5μ)

2. (ι) Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση την ακολουθία $\frac{6^n}{a^n}$ για τις μη μηδενικές τιμές του a .

(ii) Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις ακολουθίες (1,5μ)

$$\frac{8 \cdot 5^n + 2^n}{4 \cdot 5^n - 2^n}, \quad \sqrt[n]{n^2 + 7}.$$

3. Έστω A τυχαίο υποσύνολο του \mathbb{R} , $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση και $x_0 \in A$.

Αν το όριο της $f(x)$ καθώς $x \rightarrow x_0$ υπάρχει, είναι αλήθεια ότι η f είναι συνεχής στο x_0 ;

Αν η f είναι συνεχής στο x_0 , είναι αλήθεια ότι υπάρχει το όριο της $f(x)$ καθώς $x \rightarrow x_0$;

[Πλήρης αιτιολόγηση]

(1μ)

4. Έστω (a_n) αύξουσα ακολουθία πραγματικών αριθμών

(i) Είναι κάθε υποακολουθία της (a_n) αύξουσα;

(ii) Είναι η (a_n) πάντα μη φραγμένη;

(iii) Είναι η (a_n) πάντα συγκλίνουσα;

[Πλήρης αιτιολόγηση]

(1,5μ)

5. Έστω $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση ώστε $f(x)$ άρρητος για κάθε $x \in [0, 1]$. Αν $f(0) = \sqrt{2}$, να βρεθεί το $f(1)$. (1,5μ)

6. Αποδείξτε πλήρως ότι κάθε πραγματικό πολυώνυμο βαθμού 2003 έχει πραγματική ρίζα. (1μ)

7. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \notin \mathbb{Q} \\ x^3, & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$

Εξετάστε αν υπάρχει η παράγωγος της f στο σημείο 0 και υπολογίστε την, στην περίπτωση που υπάρχει. (1,5μ)

8. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση και $x_0 \in \mathbb{R}$. Αν $f(x_0) > 0$, αποδείξτε πλήρως ότι υπάρχουν $a < b$ ώστε $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (a, b)$. (1μ)

9. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \neq 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$

(i) Να βρεθεί, αν υπάρχει, το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

(ii) Εξετάστε αν υπάρχει η παράγωγος της f στο σημείο 1. (1μ)

Σημειώστε στην πρώτη σελίδα του γραπτού σας τους αριθμούς των θεμάτων που απαντήσατε (βάζοντας σε κύκλο τον αντίστοιχο αριθμό).

Μαζί με το γραπτό σας να παραδίδετε και τα θέματα. .

Καλή επιτυχία!