14/04/20

Ασκ. III (1), (2), (4)

- $f, g : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ R-ολοκλ.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t-s)g(s)\,ds = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(t-x)\,dx$$

Αλλαγή μεταβλ. $t-s=x$: $s=t-x$

$$\int_{t+\pi}^{t-\pi} f(x)g(t-x)(-1)\,dx = \int_{t-\pi}^{t+\pi} f(x)g(t-x)\,dx$$

αφού $x \longmapsto f(x)g(t-x)$ είναι 2π-περιοδ.

$$\Rightarrow \quad = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(t-x)\,dx$$

ορισμός

$$(f*g)(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(t-x)\,dx$$

Υπόθεση ~~p~~ f, q τριγ. πολυώνυμα f ολοκλ. 2π-περιοδ.

$$(\cancel{p}f*q)(t) = \int_{-\pi}^{\pi} \cancel{p}f(x)\underbrace{q(t-x)}\,\frac{dx}{2\pi}$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \cancel{p}f(x)\left(\sum_{|k|\le n} \hat{q}(k)e_k(t-x)\right)\frac{dx}{2\pi}$$

όπου $n = \deg q$

$$= \sum_k \hat{q}(k)\int_{-\pi}^{\pi} \cancel{p}f(x)\,e^{ik(t-x)}\,\frac{dx}{2\pi}$$

$$= \sum_k \hat{q}(k)\underbrace{\left(\int_{-\pi}^{\pi} \cancel{p}f(x)\,e^{-ikx}\,\frac{dx}{2\pi}\right)}_{=\,\hat{\cancel{p}f}(k)} e^{ikt}$$

$$= \sum_k \hat{q}(k)\,\hat{\cancel{p}f}(k)\,e_k(t)$$

$\Rightarrow$ ~~p~~f$*q$ είναι τριγ. πολ. με

$$\widehat{p*q}(k) = \hat{q}(k)\hat{p}(k) \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

$$\widehat{f*q}(k) = \hat{q}(k)\hat{f}(k) \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Απόδ. της (3) : $f:\mathbb{T}\to\mathbb{C}$ R-ολοκλ.

$$\sigma_m(f) \overset{?}{=} \sum_{|k|\le m}\left(1-\frac{|k|}{m+1}\right)\hat{f}(k)e_k$$

<u>Απόδ.</u> Ξέρουμε ότι

$$\sigma_m(f)(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\underbrace{K_m(t-x)}_{\text{τριγ. πολ.}}\,dx$$

από την (2)

$$= \sum_{|k|\le m}\underbrace{\hat{K}_m(k)}_{\left(1-\frac{|k|}{m+1}\right)}\hat{f}(k)\,e^{ikt}$$

∎

(4): Να υπολογίσω $\widehat{f*g}(k)$ όταν $f,g:\mathbb{T}\to\mathbb{C}$ συνεχείς

$$(f*g)(t)=\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(t-x)\,\frac{dx}{2\pi}$$

$$\widehat{f*g}(k)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f*g)(t)e^{-ikt}\,dt$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(t-x)\frac{dx}{2\pi}\right)e^{-ikt}\,dt$$

(από Ανεπ III)

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(t-x)\cdot e^{-ikt}\frac{dt}{2\pi}\right)dx$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\left(\int_{-\pi}^{\pi} g(t-x)e^{-ik(t-x)}\frac{dt}{2\pi}\right)e^{-ikx}\,dx$$

(2π-περ.)

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\underbrace{\left(\int_{-\pi}^{\pi} g(s)e^{-iks}\frac{ds}{2\pi}\right)}_{\hat{g}(k)}e^{-ikx}\,dx$$

$$=\hat{g}(k)\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}\,dx=\hat{g}(k)\hat{f}(k)$$

$\forall k\in\mathbb{Z}$

Δεύτερη λύση:

f: συνεχής άρα (Fejér)

$\exists\ (p_n)$ τριγ. πολυ: $p_n \longrightarrow f$ ομοιόμορφα

$(π.χ.\ p_n = \sigma_n(f))$

$$(f*g)(t) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(t-x)\frac{dx}{2\pi}$$

$$\overset{\text{ομοιομ. συνεχ.}}{=} \lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} p_n(x)g(t-x)\frac{dx}{2\pi}$$

$$\Rightarrow (f*g)(t) = \lim_n (p_n*g)(t)$$

Όμως, p_n τριγ. πολυ, άρα: $\widehat{p_n*g}(k) = \widehat{p_n}(k)\widehat{g}(k)$

$$\Downarrow\ (??)$$

$$\widehat{f*g}(k) = \lim_n \widehat{p_n}(k)\widehat{g}(k)$$

$$\| \qquad \int (f*g)(t)e^{-ikt}\frac{dt}{2\pi} \qquad ??$$

Πρέπει να δείξω ότι

$p_n(t) \longrightarrow f(t)$ ομοιόμορφα ως προς t

$$\Downarrow$$

$\widehat{p_n*g}(k) \longrightarrow \widehat{(f*g)}(k)$ ομοιόμορφα ως προς k

Απόδ. $\left|\widehat{p_n*g}(k) - \widehat{f*g}(k)\right|$

$$= \left|\int_{-\pi}^{\pi}(p_n*g - f*g)(t)e^{-ikt}\frac{dt}{2\pi}\right|$$

Θέτω: $h_n = p_n - f$

$$\le \int_{-\pi}^{\pi} |(h_n*g)(t)|\,\underbrace{|e^{-ikt}|}_{=1}\frac{dt}{2\pi}$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi} h_n(t-x)g(x)\frac{dx}{2\pi}\right|\frac{dt}{2\pi}$$

$$\le \int_{-\pi}^{\pi} \|h_n\|_\infty \int_{-\pi}^{\pi}|g(x)|\frac{dx}{2\pi}\,\frac{dt}{2\pi}$$

$$= \|h_n\|_\infty \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\frac{dt}{2\pi}}_{=1}\ \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}|g(x)|\frac{dx}{2\pi}}_{\|g\|_1}$$

Άρα

$$\left|\widehat{(p_n*g)}(k) - \widehat{(f*g)}(k)\right| \le \|p_n - f\|_\infty\|g\|_1 \quad \forall k\in\mathbb{Z}$$

$\downarrow 0$ $n\to\infty$

$$\Rightarrow \widehat{p_n*g}(k) \xrightarrow[n\to\infty]{} \widehat{f*g}(k)$$

ομοιόμ. ως προς k

Επομένως

$$\widehat{f*g}(k) = \lim_n \widehat{p_n * g}(k)$$

$\parallel$ (από άσκ. (2))

$$= \lim_n \widehat{p_n}(k)\,\widehat{g}(k)$$

$$= \widehat{f}(k)\,\widehat{g}(k)$$

διότι

$$\left|\widehat{f}(k) - \widehat{p_n}(k)\right| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f-p_n)(t)\,e^{-ikt}\,dt\right|$$

$$\leq \|f - p_n\| \longrightarrow 0$$

$\boxtimes$

<u>Παρατήρηση</u>

Άρα

$f*g = \lim_n p_n * f$ <u>ομοιόμορφα</u>

και $\forall\, p_n * f$ είναι τριγ. πολυώνυμο

άρα συνεχής

$\Downarrow$ (ομ. σύγκλιση)

$f*g$ είναι <u>συνεχής</u> [ΕΥΧΑΡΙΣΤΩ!]

<u>Παρατήρηση</u> δεν χρησιμοποιήσαμε ότι η g συνεχής

άρα δείξαμε το αποτέλεσμα όταν η f είναι συνεχής (και η g R-ολοκληρώσιμη)