Λήμμα 0.1 *Έστω $g : [a,b] \to \mathbb{C}$ φραγμένη συνάρτηση και $c \in (a,b)$. Υποθέτουμε ότι για κάθε $\epsilon > 0$ η g είναι ολοκληρώσιμη στα διαστήματα $[a, c-\epsilon]$ και $[c+\epsilon, b]$. Τότε η g είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$.*

Πρόταση 0.2 (Ru 8.14) *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 2π-περιοδική συνάρτηση, ολοκληρώσιμη στο $[-\pi,\pi]$. Αν για κάποιο $x \in \mathbb{R}$ υπάρχει $\delta > 0$ και $M < \infty$ ώστε*

$$|f(x+t) - f(x)| \leq M|t| \quad \text{για κάθε } t \in (-\delta, \delta)$$

τότε $S_n(f,x) \to f(x)$.

Η υπόθεση ικανοποιείται π.χ. όταν υπάρχει η f' και είναι φραγμένη εκτός από πεπερασμένο πλήθος σημείων. Την ικανοποιούν για παράδειγμα όλες οι 2π-περιοδικές συναρτήσεις που έχουν πολυγωνικά γραφήματα ή είναι κατά τμήματα πολυωνυμικές.

Απόδειξη Σταθεροποιούμε το x και ορίζουμε την $g : [-\pi,\pi] \to \mathbb{C}$ ως εξής:

$$g(t) = \begin{cases} \dfrac{f(x-t) - f(x)}{\sin(t/2)}, & t \neq 0 \\ 0, & t = 0 \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι η g είναι ολοκληρώσιμη στο $[-\pi,\pi]$. Πράγματι, είναι φραγμένη στο $[-\pi,\pi]$: στα διαστήματα $[-\pi, x-\delta]$ και $[x+\delta, \pi]$ είναι προφανώς φραγμένη, και στο (δ,δ) είναι φραγμένη από την υπόθεση:

$$\left| \frac{f(x-t) - f(x)}{\sin(t/2)} \right| \leq 2M \left| \frac{t/2}{\sin(t/2)} \right|$$

όταν $0 < |t| < \delta$, η οποία είναι φραγμένη γιατί η $\phi(s) = \frac{s}{\sin s}$ για $s \neq 0$ και $\phi(0) = 1$ είναι συνεχής στο $[-\pi,\pi]$. Επίσης, για κάθε $\epsilon > 0$ η g είναι ολοκληρώσιμη στα διαστήματα $[-\pi, x-\epsilon]$ και $[x+\epsilon, \pi]$. Άρα από το Λήμμα το $\int_{-\pi}^{\pi} g$ υπάρχει.

Έχουμε δείξει ότι

$$S_n(f,x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) D_n(t) dt$$

όπου

$$D_n(s) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=-n}^{n} \exp(iks) = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})s}{\sin\frac{s}{2}} & \text{όταν } s \neq 0 \\ 2n+1 & \text{όταν } s = 0 \end{cases}$$

Επομένως
$$(f(x-t)-f(x))D_n(t) = g(t)\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)$$
για κάθε t. Επειδή $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(x)dx = 1$ έχουμε

$$\begin{aligned} S_n(f,x)-f(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x-t)-f(x))D_n(t)dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(g(t)\cos\frac{t}{2}\right)\sin(nt)dt + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(g(t)\sin\frac{t}{2}\right)\cos(nt)dt \\ &= b_n(h_1)+a_n(h_2) \end{aligned}$$

όπου $h_1(t) = g(t)\cos\frac{t}{2}$ και $h_2(t) = g(t)\sin\frac{t}{2}$. Παρατηρούμε όμως ότι οι h_1 και h_2 είναι ολοκληρώσιμες στο $[-\pi,\pi]$. Επομένως, από το Λήμμα Riemann-Lebesgue, τα δύο ολοκληρώματα τείνουν στο 0 καθώς $n\to\infty$. $\square$

Παρατήρηση Είναι ενδιαφέρον να συγκρίνει κανείς τη συμπεριφορά των σειρών Fourier με εκείνη των δυναμοσειρών. Ας θυμηθούμε ότι αν μια δυναμοσειρά συγκλίνει σε κάποιο σημείο $t\in\mathbb{R}$, $t\neq 0$, τότε αναγκαστικά θα συγκλίνει σε ολόκληρο το διάστημα $(-t,t)$. Αυτό δεν ισχύει για σειρές Fourier : για παράδειγμα, έχουμε δείξει ότι η σειρά $\displaystyle\sum_n \frac{\cos nt}{n}$ συγκλίνει για κάθε $t\neq 2k\pi$, όχι όμως για $t=0$.

Μάλιστα, σε αντίθεση με τις δυναμοσειρές, το επόμενο αποτέλεσμα δείχνει ότι η σύγκλιση μιας σειράς Fourier $S(f)$ σε ένα σημείο t εξαρτάται μόνον από τις τιμές της f σε μια (αυθαίρετα μικρή) περιοχή του t. Έτσι, αν οι f και g ταυτίζονται σε μια μικρή περιοχή J του t, τότε, για κάθε $x\in J$, οι σειρές Fourier $S(f,x)$ και $S(g,x)$ είτε θα συγκλίνουν και οι δύο είτε θα αποκλίνουν και οι δύο:

Πόρισμα 0.3 (Αρχή τοπικότητας του Riemann) *Αν οι f και g ταυτίζονται σε κάθε σημείο ενός* ανοικτού *διαστήματος J, τότε $S_n(f,x)-S_n(g,x)\to 0$ για κάθε $x\in J$.*

Απόδειξη Θεωρούμε την $h=f-g$. Επειδή το J είναι ανοικτό, κάθε $x\in J$ ικανοποιεί την υπόθεση της προηγούμενης πρότασης, άρα η $(S_n(h,x))_n$ συγκλίνει στο $h(x)=0$. $\square$