605: Ασκήσεις ΙΙ

1. Έστω $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}$ άρτια ολοκληρώσιμη συνάρτηση με την ιδιότητα: $a_k(f)\geq 0$ για κάθε $k\geq 0$. Δείξτε ότι $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(f)<\infty$. (Υπενθύμιση: $a_k(f)=\hat{f}(k)+\hat{f}(-k)$.)

2. Κάθε ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{C}$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο $f=f_a+f_p$ όπου η f_a είναι άρτια και η f_p περιττή. Δείξτε ότι

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f|^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f_a|^2+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f_p|^2.$$

3. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ συνεχής 2π-περιοδική συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n+1}\sum\limits_{k=-n}^{n}|k\hat{f}(k)|=0$. Δείξτε ότι τότε $S_n(f)\to f$ ομοιόμορφα.

4. Αν $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ είναι 2π περιοδική και ολοκληρώσιμη συνάρτηση, να δειχθεί ότι

$$\lim_{x\to 0}\int|f(t-x)-f(t)|\,dt=0.$$

Υπόδειξη: Εξετάστε πρώτα την περίπτωση που η f είναι συνεχής.

(*Από τις Ασκήσεις 2.5 των σημειώσεων Απ. Γιαννόπουλου 2012*:)

5. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια 2π-περιοδική συνάρτηση, Riemann ολοκληρώσιμη στο $[-\pi,\pi]$. Για κάθε $m\in\mathbb{N}$ ορίζουμε

$$g_m(x)=f(mx).$$

Περιγράψτε το γράφημα της g_m σε σχέση με αυτό της f. Είναι η g_m περιοδική? Εκφράστε τους συντελεστές Fourier της g_m συναρτήσει των συντελεστών Fourier της f.

8. Θεωρούμε την 2π-περιοδική συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ που στο $[-\pi,\pi]$ ορίζεται από την

$$f(x)=|x|.$$

Σχεδιάστε την γραφική παράσταση της f, υπολογίστε τους συντελεστές Fourier της f και δείξτε ότι $\widehat{f}(0)=\pi/2$ και

$$\widehat{f}(k)=\frac{-1+(-1)^k}{\pi k^2},\qquad k\neq 0.$$

Γράψτε τη σειρά Fourier $S[f]$ της f σαν σειρά συνημιτόνων και ημιτόνων. Θέτοντας $x=0$ δείξτε ότι

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}\qquad\text{και}\qquad\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

9. Έστω $[a,b]$ κλειστό διάστημα που περιέχεται στο εσωτερικό του $[-\pi,\pi]$. Θεωρούμε την $f(x)=\chi_{[a,b]}(x)$ που ορίζεται στο $[-\pi,\pi]$ από τις $f(x)=1$ αν $x\in[a,b]$ και $f(x)=0$ αλλιώς, και την επεκτείνουμε 2π-περιοδικά στο $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι η σειρά Fourier της f είναι η

$$S[f](x)=\frac{b-a}{2\pi}+\sum_{k\neq 0}\frac{e^{-ika}-e^{-ikb}}{2\pi ik}\,e^{ikx}.$$

Δείξτε ότι η $S[f](x)$ δεν συγκλίνει απολύτως για κανένα $x\in\mathbb{R}$. Βρείτε τα $x\in\mathbb{R}$ για τα οποία η $S[f](x)$ συγκλίνει.

11. Έστω f,f_n ($n\in\mathbb{N}$) συναρτήσεις 2π-περιοδικές, ολοκληρώσιμες στο $[-\pi,\pi]$, οι οποίες ικανοποιούν την

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-f_n(x)|\,dx=0.$$

Δείξτε ότι

$$\widehat{f_n}(k)\to\widehat{f}(k)\quad\text{όταν } n\to\infty,$$

ομοιόμορφα ως προς k. Δηλαδή, για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $n_0\in\mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n\geq n_0$ και για κάθε $k\in\mathbb{Z}$,

$$|\widehat{f_n}(k)-\widehat{f}(k)|<\varepsilon.$$