Τρι 3/3/2020

<u>Θεωρ Μοναδ</u> $f, g : (-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ συνεχείς (2π-περιοδ)

και $\hat{f}(k) = \hat{g}(k) \quad \forall k \in \mathbb{Z}$

(ισοδ. $a_n(f) = a_n(g)$ και $b_n(f) = b_n(g) \ \forall n$)

$\Longrightarrow \quad f(t) = g(t) \quad \forall t$

<u>Παρατ</u> Έχω $\mathcal{F} : C([-\pi,\pi]) \longrightarrow \ell^\infty(\mathbb{Z})$

$$f \longmapsto (\hat{f}(k))_{k \in \mathbb{Z}}$$

γραμμική !!

$$\widehat{f + \lambda g}(k) = \hat{f}(k) + \lambda \hat{g}(k) \quad \forall k$$

<u>δηλ</u> $\mathcal{F}(f + \lambda g) = \mathcal{F}f + \lambda \mathcal{F}g$

Θέλω νδο $\mathcal{F}$ είναι 1-1

$\Longleftrightarrow$ νδο αν $\mathcal{F}(h) = 0$ τότε $h = 0$

Έστω λοιπόν $h \in C([-\pi,\pi])$ με $\hat{h}(k) = 0 \ \forall k \in \mathbb{Z}$

Υποθέτω προς άτοπο ότι $h \neq 0$

τότε $\exists t_0 \in [-\pi,\pi]$ ώστε $h(t_0) \neq 0$

$\widehat{\mathrm{Re}\,h}(k) \overset{?}{=} 0$ Άσκ!

οπότε, ή $(\mathrm{Re}\,h)(t_0) \neq 0$ ή $(\mathrm{Im}\,h)(t_0) \neq 0$

Μπορώ λοιπόν να υποθ. $h : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ και ότι $h(t_0) > 0$

Θεωρώ την $\varphi(t) = h(t + t_0)$ οπότε $\varphi(0) > 0$

και $\hat{\varphi}(k) = \int_{-\pi}^{\pi} h(t + t_0) e^{-ikt} \frac{dt}{2\pi}$

$(t + t_0 = s)$

<u>Παρατ</u>

Αν $h_x(t) = h(t - x)$ τότε

$\hat{h}_x(k) = e^{-ikx} \hat{h}(k)$

$\forall k$

<u>Άσκ</u>

$$= \int_{-\pi + t_0}^{\pi + t_0} h(s) e^{-ik(s - t_0)} \frac{ds}{2\pi}$$

$$\overset{\pi\varepsilon\rho}{=} \int_{-\pi}^{\pi} h(s) e^{-iks} \frac{ds}{2\pi} e^{ikt_0} = 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

<u>δηλ</u> <u>θέλω</u> $\hat{\varphi}(k) = 0 \ \forall k \in \mathbb{Z}$ και $\varphi(0) > 0 \Rightarrow$ άτοπο

Αφού φ συνεχής <u>στο 0</u>

$\exists \delta > 0$ ώστε $|t| < \delta \Rightarrow |\varphi(t)| < \frac{\varphi(0)}{2} \Rightarrow \varphi(t) > \frac{\varphi(0)}{2}$

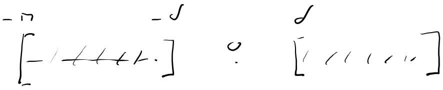
και μπορώ $\delta < \pi/2$

ονομάζω $a = \frac{2}{3}(1 - \cos\delta) \in (0, 1)$

$\frac{3a}{2} = 1 - \cos\delta$

και έστω $p(t) = (a+\cos t) \in (-a, a)$

Πρoφ.



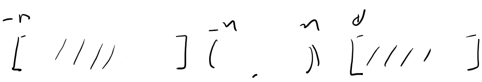
αν $\delta < |t| < \pi$ τότε $|p(t)| < 1 - \frac{a}{2}$

[επειδή $a + \cos t > a - 1 > \frac{a}{2} - 1 = -(1-\frac{a}{2})$

$a + \cos t < a + \cos\delta = a + 1 - \frac{3a}{2} = (1-\frac{a}{2})$]

Έχω $p(0) = a+1$ άρα $\exists\, \eta > 0$ ώστε

$|t| < \eta \Rightarrow p(t) > \frac{a}{2} + 1$ και μπορώ $\eta < \delta$.

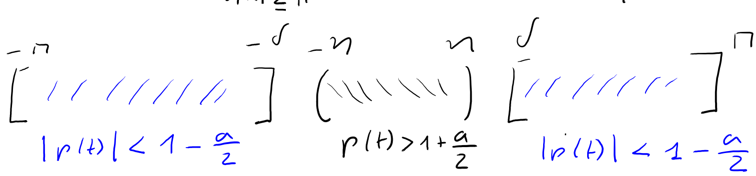


Θέτω $p_m(t) = p(t)^m = (a+\cos t)^m$, $m \in \mathbb{N}$

και εξετάζω το

$$\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t)\, p_m(t)\,dt = I_1 + I_2$$

όπου $I_1 := \int_{\delta<|x|\le\pi} \varphi p_m$, $I_2 = \int_{|x|<\delta} \varphi p_m$



(1): $\delta < |x| \le \pi \Rightarrow |\varphi(x) p_m(x)| \le |\varphi(x)| (1-\frac{a}{2})^m$

$$\Rightarrow |I_1| \le \int_{\delta<|x|\le\pi} |\varphi p_m| \le (1-\frac{a}{2})^m \int_{\delta<|x|\le\pi} |\varphi| \le (1-\frac{a}{2})^m \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} |\varphi(x)|\,dx}_{<+\infty}$$

$$\Rightarrow \lim_{m\to\infty} |I_1| = 0 \quad \text{γιατί} \quad (1-\frac{a}{2})^m \xrightarrow[m]{} 0$$

(2) $|x| < \delta \Rightarrow \varphi(x) p_m(x) \ge 0$

$$\Rightarrow I_2 = \int_{-\delta}^{\delta} \varphi p_m \ge \int_{-\eta}^{\eta} \varphi p_m$$

$|x| < \eta \Rightarrow |\varphi(x) p_m(x)| \ge \frac{\varphi(0)}{2} (1+\frac{a}{2})^m$

$$I_2 \ge \int_{-\eta}^{\eta} \varphi p_m \ge \int_{-\eta}^{\eta} \frac{\varphi(0)}{2} (1+\frac{a}{2})^m dx = 2\eta \frac{\varphi(0)}{2} (1+\frac{a}{2})^m$$

$$\xrightarrow[m\to\infty]{} \infty$$

Επιλέγω m_0 ώστε $|I_1| < 1$ $\forall m \geq m_0$ οπότε $\forall m \geq m_0$ έχω

$$\int \varphi p_m = I_1 + I_2 \geq -1 + I_2 \xrightarrow[m \to +\infty]{} +\infty$$

Όμως, p_m : τριγ. πολυ (γιατί;) (ΑΣΚ!)

άρα $p_m = \sum_k c_k^m e_k$

οπότε

$$\int \varphi p_m = \sum_k c_k^m \int \varphi e_k = \sum_k c_k^m \hat{\varphi}(-k) = 0 \quad !! \quad \forall m$$

άτοπο

Πρότ : • f συνεχής, 2π-περιοδ

• f' $\int$ιμη

$$\Longrightarrow \widehat{f'}(k) = ik\hat{f}(k) \quad \forall k\in\mathbb{Z}$$

Απόδ

$$2\pi \hat{f'}(k) = \int_{-\pi}^{\pi} f'(x)e^{-ikx}dx$$

$$= \left[f(x)e^{-ikx}\right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} f(x)(-ik)e^{-ikx}dx$$

(περ.)

$$= 0 + ik\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}dx$$

Πρότ . • f συνεχής, 2π-περιοδ

• $\sum |k\hat{f}(k)| < +\infty$

$$\Longrightarrow \exists f', \text{ συνεχής και } f'(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} ik\hat{f}(k)e^{ikx} \text{ ομοιόμορφα.}$$

Απόδ (i) προφ. ότι $\sum|\hat{f}(k)| < +\infty$

άρα $S_N(f)$ συγκλίνει ομοιόμορφα

Από μοναδικότητα έχω ! $S_N(f) \rightrightarrows f$.

όμως $\forall\, S_N(f)$ παραγωγίσιμη και

$$S_N(f)' = \sum_{|k|\le N} \hat{f}(k)(e_k)' = \sum_{|k|\le N} ik\hat{f}(k)e_k$$

η οποία συγκλίνει ομοιόμορφα αφού $\sum_k |k\hat{f}(k)| < +\infty$

Θέτω

$$g(x) := \lim_N S_N(f)'(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} ik\hat{f}(k)e^{ikx}$$

Λόγω ομοιόμορφης σύγκλισης έχουμε

$\forall x\in[-\pi,\pi]$

$$\int_{-\pi}^{x} g(t)dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} ik\hat{f}(k)\int_{-\pi}^{x} e^{ikt}dt$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k)\left(e^{ikx} - e^{-ik\pi}\right)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k)e^{ikx} - \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k)e^{-ik\pi}}_{\text{σταθ}}$$

$= f(x) - c$ ∴ Άρα $\exists f'(x)$ και $= g(x)$!! ∎

Λήμμα. • $f, f', f'', \ldots f^{(n-1)}$ συνεχείς 2π-περιοδ.
• $f^{(n)}$ ∫ διμη

$$\Longrightarrow \forall k \neq 0, \ |\hat{f}(k)| \leq \frac{\|f^{(n)}\|_1}{|k|^n}$$

Απόδ. Έχω δείξει (*) ότι $\forall k \in \mathbb{Z}$

$$\widehat{f'}(k) = ik\hat{f}(k), \quad \widehat{f''}(k) = (ik)^2 \hat{f}(k), \ldots, \widehat{f^{(n)}}(k) = (ik)^n \hat{f}(k)$$

Όμως

$$|\widehat{f^{(n)}}(k)| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^{(n)}(t) e^{-ikt} dt \right| \leq \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f^{(n)}(t)| dt}_{=: \|f^{(n)}\|_1}$$

$$\Rightarrow (k \neq 0): \ |\hat{f}(k)| = \frac{1}{|ik|^n} |\widehat{f^{(n)}}(k)| \leq \frac{\|f^{(n)}\|_1}{|k|^n}$$

Πρόταση. Αν f, f', f'' συνεχείς + 2π περιοδικές, τότε

$$\|S_n(f) - f\|_\infty \longrightarrow 0$$

Απόδ. Ξέρω ότι για $k \neq 0$, $|\hat{f}(k)| \leq \frac{1}{|k|^2} \|f''\|_1$

$$\Rightarrow \sum_{k \neq 0} |\hat{f}(k)| \leq \|f''\|_1 \sum_{k \neq 0} \frac{1}{|k|^2}$$

$$\Rightarrow \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(k)| < +\infty \Longrightarrow S_n(f) \text{ συγκλίνει ομοιόμ.} \xRightarrow{(\text{μοναδ.})} \text{στην } f$$

$\blacksquare$

(*) Λήμμα. Αν f συνεχής 2π-περιοδική και $\exists f'$ και είναι ∫ διμη, τότε

$$\widehat{f'}(k) = ik\hat{f}(k) \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Απόδ.

$$2\pi \widehat{f'}(k) = \int_{-\pi}^{\pi} f'(t) e^{-ikt} dt = \left[f(t) e^{-ikt} \right]_{-\pi}^{\pi} - \int f(t)(-ik) e^{-ikt} dt$$

$$= \underset{\substack{\uparrow \\ \text{λόγω περιοδικότητας}}}{0} + ik \int f(t) e^{-ikt} dt = ik\hat{f}(k)$$

$\blacksquare$