Σειρές Fourier και Ολοκλήρωμα Lebesgue (605)

`http://eclass.uoa.gr/courses/MATH121/`

Σύντομη Περιγραφή

Ο J. Fourier (1768-1830) πίστευε ότι κάθε 2π-περιοδική συνάρτηση f μπορεί να «αναπαρασταθεί» με μια «τριγωνομετρική σειρά» της μορφής

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum a_n \cos nt + \sum b_n \sin nt$$

την *σειρά Fourier της f*. Πίστευε δηλαδή ότι κάθε περιοδική συνάρτηση αποτελεί «συνδυασμό» των «καθαρών» ημιτονοειδών συναρτήσεων. Χρησιμοποίησε αυτές τις «αναπαραστάσεις» για την επίλυση διαφορικών εξισώσεων (με μερικές παραγώγους) που περιέγραφαν φυσικά φαινόμενα.

Από την αρχή τέθηκαν ερωτήματα σχετικά με την σύγκλιση των σειρών αυτών. Για την απάντηση τέτοιων ερωτημάτων χρειάστηκε να αναπτυχθούν πολλά από τα εργαλεία της Μαθηματικής Ανάλυσης, και κυρίως να διευκρινισθεί η ίδια η έννοια της συνάρτησης.

Ταυτόχρονα όμως οι σειρές Fourier αποτέλεσαν και αποτελούν απαραίτητο εργαλείο σε πολλούς και διαφορετικούς κλάδους των Μαθηματικών (όπως θα δούμε), αλλά και για τις εφαρμογές των Μαθηματικών στις Επιστήμες και την Τεχνολογία.

Θα επιχειρήσουμε μια σύντομη και στοιχειώδη εισαγωγή στο εργαλείο αυτό, εξετάζοντας ορισμένα κεντρικά ερωτήματα:.

• Ποιές συναρτήσεις f έχουν σειρά Fourier και πώς «αναλύεται» μια συνάρτηση σε σειρά Fourier (*φασματική ανάλυση*);

• Αν ξέρουμε τους συντελεστές της σειράς Fourier της f, μπορούμε να «συνθέσουμε» την f (*φασματική σύνθεση*);

• Συγκλίνει η σειρά Fourier της f, και αν ναι, με ποια έννοια (σημειακή, ομοιόμορφη, μέση τετραγωνική σύγκλιση);

• Είναι κάθε (συγκλίνουσα) *τριγωνομετρική σειρά* η *σειρά Fourier* κάποιας συνάρτησης; Είναι μοναδική αυτή η συνάρτηση, αν υπάρχει;

Επειδή οι συντελεστές της σειράς Fourier μιας f υπολογίζονται μέσω ολοκληρωμάτων, όπως

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt dt$$

θα χρειαστεί να επανεξετάσουμε την έννοια του ολοκληρώματος. Θα διαπιστώσουμε ότι το ολοκλήρωμα Riemann δεν αρκεί για να αντιμετωπίσει τα προβλήματα, και θα οδηγηθούμε έτσι σε μια ιδιαίτερα γόνιμη γενίκευσή του, το ολοκλήρωμα Lebesgue.

Η βασική ιδέα για τον ορισμό του ολοκληρώματος αυτού μπορεί να περιγραφεί με τον ακόλουθο τρόπο:

Στο ολοκλήρωμα Riemann διαμερίζει κανείς *το πεδίο ορισμού* μιας συνάρτησης f και εξετάζει την οριακή συμπεριφορά της ακολουθίας των μερικών αθροισμάτων $\sum f(t_i)\Delta t_i$, όπου Δt_i είναι το μήκος του αντίστοιχου υποδιαστήματος. Έτσι, αν η συμπεριφορά της f σε μικρά υποδιαστήματα του πεδίου ορισμού της είναι αρκετά ακατάστατη, η συνάρτηση δεν θα είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann. Κλασσικό παράδειγμα αποτελεί η συνάρτηση Dirichlet, που είναι 0 στους άρρητους και 1 στους ρητούς (του $[0, 1]$).

Στο ολοκλήρωμα Lebesgue, αντίθετα, διαμερίζουμε *το σύνολο τιμών* της f σε υποδιαστήματα $I_1, I_2, \ldots, I_n$ και θεωρούμε μερικά αθροίσματα της μορφής $\sum f(t_i)\mu(A_i)$, όπου τώρα $A_i = f^{-1}(I_i)$ και $\mu(A_i)$ το «μήκος» του A_i. Έτσι αν οι αντίστροφες εικόνες A_i έχουν «μήκος», μπορεί κανείς να εξετάσει τη σύγκλιση της ακολουθίας των μερικών αθροισμάτων.

Το ολοκλήρωμα Lebesgue έχει δύο βασικά πλεονεκτήματα:

1) Επιτρέπει την ολοκλήρωση πολύ γενικότερων συναρτήσεων από ότι το ολοκλήρωμα Riemann.

2) Συμπεριφέρεται πολύ καλύτερα από το ολοκλήρωμα Riemann ως προς οριακές διαδικασίες.

Θα ασχοληθούμε με τον προσεκτικό ορισμό του ολοκληρώματος αυτού, για συναρτήσεις μιας πραγματικής μεταβλητής, με τα βασικά θεωρήματα σύγκλισης, και με τις βασικές εφαρμογές του στις σειρές Fourier.

Προαπαιτούμενες γνώσεις.

Απειροστικός Λογισμός μιάς πραγματικής μεταβλητής, κυρίως ολοκλήρωμα Riemann και σειρές.

Ακολουθίες και σειρές συναρτήσεων: σημειακή και ομοιόμορφη σύγκλιση.

(Θα υπάρξει μια σύντομη υπενθύμιση του ολοκληρώματος Riemann και των βασικών αποτελεσμάτων για σειρές συναρτήσεων.)

Βιβλιογραφία

- Α. Γιαννόπουλου, Σημειώσεις 2011-12 (στην η-τάξη του μαθήματος).
- Μ. Κολουντζάκη, Χ. Παπαχριστόδουλου, *Ανάλυση Fourier*. `https://repository.kallipos.gr/handle/11419/5199`, `http://mk.eigen-space.org/fourierbook/`
- W. Rudin, *Αρχές Μαθηματικής Αναλύσεως* (Μεταφ. Δ.Κ. Σταλίδη). Εκδ. Leader Books, 2000 (τίτλος πρωτοτύπου: *Principles of Mathematical Analysis*, McGraw-Hill, 1976.)
- Σ. Νεγρεπόντη, Σ. Γιωτόπουλου, Σ. Γιαννακούλια, *Απειροστικός Λογισμός ΙΙβ, Κεφ. 30*. Εκδ. Συμμετρία, 1993
- E.M. Stein, R. Shakarchi, *Fourier Analysis, an introduction*, Princeton University Press, 2003.
- E.M. Stein, R. Shakarchi, *Real analysis: measure theory, integration, and Hilbert spaces*, Princeton University Press, 2009.
- K.R. Davidson, A.P. Donsig, *Real Analysis with Real Applications*, Prentice Hall, 2002.
- T.W. Korner, *Fourier Analysis*, Cambridge University Press, 1988.
- N.L. Carrothers, *Real Analysis*, Cambridge University Press, 2000.
- H. Dym, H.P. McKean, *Fourier series and integrals*. Probability and Mathematical Statistics, No. 14. Academic Press, New York-London, 1972.

Συμπληρωματική Βιβλιογραφία (πιο προχωρημένα συγγράμματα)

Y. Katznelson, *An introduction to Harmonic Analysis*, Cambridge University Press; 3rd edition (January 5, 2004), Dover, 1976.

G. Bachman, L. Narici, E. Beckenstein, *Fourier and Wavelet Analysis*, Springer, 2002.Y.

Γ. Κουμουλλή, Σ. Νεγρεπόντη, *Θεωρία Μέτρου*, Εκδ. Συμμετρία, 1988.

Είμαι στη διάθεση των φοιτητών για περισσότερες πληροφορίες.

Αριστείδης Κατάβολος
Γραφείο 305. Τηλέφωνο γραφείου: 210–7276316
E-mail: `akatavol@math.uoa.gr`
Ηλ. σελίδα: `http://users.uoa.gr/~akatavol`