

1. Σε μια τάξη Γ' Λυκείου στα μαθηματικά κατεύθυνσης έγινε ο παρακάτω διάλογος:

Κ. (καθηγητής) : Ποια εικόνα φέρνετε στο μυαλό σας όταν λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της ;

Μ. (μαθητής) : Μιας καμπύλης που δεν έχει ασυνέχειες, δηλαδή χωρίς κενά ή τρύπες

Κ. : Τι ακριβώς εννοείς;

Μ. : Μια συνάρτηση είναι συνεχής είναι όταν μπορούμε να την σχεδιάσουμε με ένα μολύβι χωρίς να χρειάζεται να σηκώσουμε το χέρι μας.

α) Περιγράψτε τους διδακτικούς στόχους που πιστεύετε ότι είχε ο Κ. κάνοντας την αρχική ερώτηση;

β) Μετά την τελευταία απάντηση του μαθητή πιστεύετε ότι η συζήτηση πρέπει να συνεχιστεί; Αν όχι γιατί; Αν ναι πως θα τη συνεχίζατε εσείς;

γ) Ποια τοπολογική ιδιότητα περιγράφει τον ισχυρισμό του μαθητή;

2. Σε ένα διαγώνισμα δόθηκε η ακόλουθη άσκηση :

«Αν f συνεχής συνάρτηση στο $[α,β]$, $f(α) < α$, και $\int_{α}^{β} f(x)dx \geq \frac{β^2 - α^2}{2}$ να δειχθεί ότι υπάρχει ζ στο $(α,β)$ ώστε $f(\zeta) = \zeta$.»

Ένας μαθητής απάντησε ως εξής :

«Εφόσον $f(α) < α$ το σημείο $(α, f(α))$ της γραφικής της f βρίσκεται «κάτω» από το σημείο $(α,α)$ της ευθείας $y = x$. Από την άλλη η σχέση

$\int_{α}^{β} f(x)dx \geq \frac{β^2 - α^2}{2}$ σημαίνει ότι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται

από την συνάρτηση f και τις ευθείες $x=α$ και $x = β$ είναι μεγαλύτερο του αντίστοιχου εμβαδού του τραπεζίου που σχηματίζει η $y = x$ με τις $x = α$ και $x = β$. Αυτό δεν μπορεί να συμβαίνει αν όλη η γραφική παράσταση της συνεχούς f ήταν «κάτω» από την ευθεία $y = x$. Άρα υπάρχει η στο $(α,β)$ με $f(\eta) > \eta$ και επομένως λόγω της συνέχειας της f οι γραφικές των f και $y=x$ τέμνονται, δηλαδή θα υπάρχει ζ στο $(α,β)$ ώστε $f(\zeta) = \zeta$.»

α) Βαθμολογήστε την απάντηση του μαθητή κάνοντας όσες διορθώσεις θεωρείτε απαραίτητες.

β) Αν είσασταν ο καθηγητής της τάξης και οι μαθητές δεν μπορούσαν να λύσουν την παραπάνω άσκηση γράψτε πως θα παρουσιάζατε στους μαθητές την λύση της.

γ) Τι μέθοδο θα ακολουθούσατε στη διδασκαλία μιας δύσκολης απόδειξης προκειμένου να βοηθήσετε τους μαθητές να την κατανοήσουν;

δ) Ποιοί πιστεύετε ότι είναι οι στόχοι της συζήτησης μιας απόδειξης στην τάξη; Αιτιολογήστε την άποψη σας.