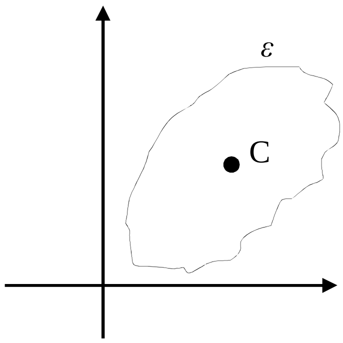
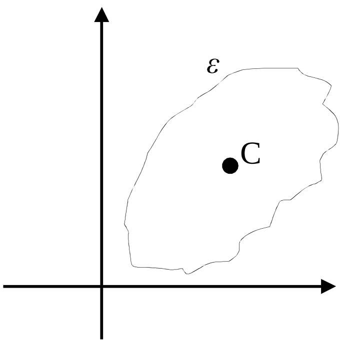
ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΠΙΝΑΚΑ ΣΥΝΔΙΑΣΠΟΡΑΣ
(Covariance Matrix) **ΕΙΚΟΝΑΣ**



Έστω η εικόνα ε του σχήματος με τα φωτεινά pixels να έχουν το κάθε ένα διάνυσμα θέσης
$\mathbf{r}_i=(x_i,y_i)^{\mathrm{T}}$,i=1,2,...,N

Έστω ότι κάθε pixel της εικόνας έχει φωτεινότητα a_i, i=1,2,...,N

Το κεντροειδές, C της εικόνας έχει διάνυσμα θέση $\mathbf{r}_C=(x_C,y_C)^{\mathrm{T}}$



Το κεντροειδές, C της εικόνας έχει διάνυσμα θέση $\mathbf{r}_C=(x_C,y_C)^{\mathrm{T}}$

όπου

$$x_C=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}a_i x_i,\qquad y_C=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}a_i y_i$$

Ο Πίνακας Συνδιασποράς της ε ορίζεται ως εξής:

$$\mathbf{C}_{\mathbf{r}}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}a_i\left(\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_C\right)\left(\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_C\right)^T$$

Ο Πίνακας Συνδιασποράς της ε ορίζεται ως εξής:

$$\mathbf{C_r} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} a_i \left(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_C\right)\left(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_C\right)^T$$

και από τον ορισμό αυτό προκύπτει:

$$\mathbf{C_r} = \frac{1}{N}\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{N}\left(x_i - x_C\right)^2 a_i & \sum_{i=1}^{N}\left(x_i - x_C\right)\left(y_i - y_C\right)a_i \\ \sum_{i=1}^{N}\left(x_i - x_C\right)\left(y_i - y_C\right)a_i & \sum_{i=1}^{N}\left(y_i - y_C\right)^2 a_i \end{bmatrix}$$

Θυμηθείτε τους ορισμούς των κεντρικών ροπών και επιβεβαιώστε ότι ισχύει:

$$\mathbf{C_r} = \frac{1}{N}\begin{bmatrix} \mu_{20} & \mu_{11} \\ \mu_{11} & \mu_{02} \end{bmatrix}$$

Ιδιοτιμές και Ιδιοδιανύσματα του Πίνακα Συνδιασποράς

Θυμηθείτε ότι για ένα τετραγωνικό Πίνακα, αν υπάρχει μοναδιαίο διάνυσμα **v** για το οποίο ισχύει

Bv=λ**v**

με λ πραγματικό ή μιγαδικό αριθμό, τότε το **v** καλείται ιδιοδιάνυσμα και το λ ιδιοτιμή του **B**

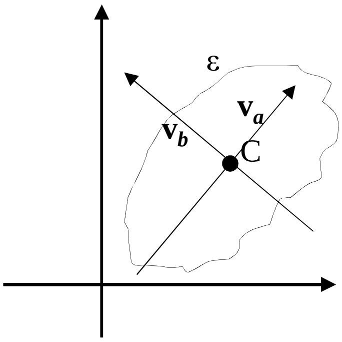
Στη βιβλιογραφία αποδεικνύεται ότι οι ιδιοτιμές, λ_a και λ_b του πίνακα συνδιασποράς είναι πραγματικές και μη αρνητικές με

$$\lambda = \frac{1}{2N}\left(\mu_{20} + \mu_{02} \pm \sqrt{\left(\mu_{20} - \mu_{02}\right)^2 + 4\mu_{11}^2}\right)$$

Από τη σχέση αυτή προκύπτει: $\lambda_a \geq \frac{\mu_{20}}{N}, \frac{\mu_{02}}{N} \geq \lambda_b \geq 0$

Αποδεικνύεται ότι όταν οι $\lambda_a > \lambda_b$ τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $\mathbf{v}_\alpha$ και $\mathbf{v}_b$ του πίνακα είναι κάθετα μεταξύ τους.

Ας αλλάξουμε το σύστημα συντεταγμένων της εικόνας ε μεταφέροντάς την αρχή του στο κεντροειδές C και στρέφοντας τους άξονες ώστε να γίνει ο Οx παράλληλος προς το $\mathbf{v}_\alpha$ και ο Oy παράλληλος προς το $\mathbf{v}_b$. Για το σκοπό αυτό:



ορίζεται ο πίνακας

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_a^T \\ \mathbf{v}_b^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{a1} & v_{a2} \\ v_{b1} & v_{b2} \end{bmatrix}$$

και στη συνέχεια ο μετασχηματισμός

$$\mathbf{w}_i = (x_{i1}', y_{i1}')^T = \mathbf{A}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_\mathbf{C}),\quad i=1,2,\ldots,N$$

Στο νέο σύστημα συντεταγμένων προφανώς το κεντροειδές έχει συντεταγμένες (0,0) και ο πίνακας συνδιασποράς των νέων διανυσμάτων θέσεως, $\mathbf{w}_i$, είναι:

$$\mathbf{C}_\mathbf{w} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} a_i \mathbf{w}_i \mathbf{w}_i^T = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} a_i \mathbf{A}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_C)\left[\mathbf{A}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_C)\right]^T =$$

$$\mathbf{C}_\mathbf{w} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} a_i \mathbf{A}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_C)(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_C)^T \mathbf{A}^T =$$

$$\mathbf{C}_\mathbf{w} = \mathbf{A}\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} a_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_C)(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_C)^T\right]\mathbf{A}^T$$

$$\mathbf{C}_\mathbf{w} = \mathbf{A}\mathbf{C}_\mathbf{r}\mathbf{A}^T$$

Έτσι τώρα προκύπτει:

$$\mathbf{C_w} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_a^T \\ \mathbf{v}_b^T \end{bmatrix} \mathbf{C_r} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_a^T \\ \mathbf{v}_b^T \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_a^T \\ \mathbf{v}_b^T \end{bmatrix} \mathbf{C_r} \left[\mathbf{v}_a, \mathbf{v}_b \right] = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_a^T \\ \mathbf{v}_b^T \end{bmatrix} \left[\mathbf{C_r} \mathbf{v}_a, \mathbf{C_r} \mathbf{v}_b \right]$$

ή

$$\mathbf{C_w} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_a^T \\ \mathbf{v}_b^T \end{bmatrix} \left[\lambda_\alpha \mathbf{v}_a, \lambda_b \mathbf{v}_b \right] = \begin{bmatrix} \lambda_\alpha & 0 \\ 0 & \lambda_b \end{bmatrix}$$

Δηλαδή:

$$\mathbf{C_w} = \begin{bmatrix} \lambda_\alpha & 0 \\ 0 & \lambda_b \end{bmatrix}$$

Τέλος αν συμβολίσουμε με μ_{20} , μ_{02} και μ_{11} τις κεντρικές ροπές στο νέο σύστημα συντεταγμένων και θυμηθούμε ότι ο πίνακας συδιασποράς και οι κεντρικές ροπές συνδέονται:

$$\mathbf{C_w} = \frac{1}{N} \begin{bmatrix} \mu_{20} & \mu_{11} \\ \mu_{11} & \mu_{02} \end{bmatrix}$$

Οπότε

$$\mathbf{C_w} = \begin{bmatrix} \lambda_\alpha & 0 \\ 0 & \lambda_b \end{bmatrix} = \frac{1}{N} \begin{bmatrix} \mu_{20} & \mu_{11} \\ \mu_{11} & \mu_{02} \end{bmatrix}$$

Η τελευταία σχέση οδηγεί στις πιο κάτω διαπιστώσεις για την περίπτωση που χρησιμοποιηθεί σύστημα συντεταγμένων με αρχή το κεντροειδές και άξονες τα ιδιοδιανύσματα της εικόνας.

1. Για τις ροπές δεύτερης τάξης ισχύει $\mu_{20}=\lambda_a N$, $\mu_{02}=\lambda_b N$ και $\mu_{11}=0$
2. Επειδή για οποιοδήποτε σύστημα συντεταγμένων, όπως έχουμε διαπιστώσει, ισχύει $\lambda_a N \geq \mu_{20}$ και $\mu_{02} \geq \lambda_b N$ σημαίνει ότι στο σύστημα των ιδιοδιανυσμάτων η μ_{20} γίνεται μέγιστη και η μ_{02} γίνεται ελάχιστη.

3. Αφού ισχύει $\mu_{20} = \sum_{i=1}^{N} x_i^{'2} a_i = \max \;\&\; \mu_{02} = \sum_{i=1}^{N} y_i^{'2} a_i = \min$

συμπεραίνουμε ότι η διεύθυνση του **v**1 είναι ο κύριος άξονας και η διεύθυνση του **v**2 είναι ο δευτερεύων και ισχύει:

$$I_\Delta = \mu_{20} = \lambda_\alpha \times N \;\&\; \quad I_\Pi = \mu_{02} = \lambda_b \times N$$

όπου I_Δ, I_Π οι ροπές αδράνειας ως προς το δευτερεύοντα και τον πρωτεύοντα άξονα αντίστοιχα.

Όταν ισχύει $\lambda_a = \lambda_b$, τότε η χαρακτηριστική εξίσωση των ιδιοτιμών του πίνακα συνδιασποράς $\mathbf{C}_r$ είναι δευτεροβάθμια εξίσωση με διακρίνουσα μηδέν, δηλαδή η δευτεροβάθμια εξίσωση ως προς λ

$$\begin{vmatrix} \frac{\mu_{20}}{N} - \lambda & \frac{\mu_{11}}{N} \\ \frac{\mu_{11}}{N} & \frac{\mu_{02}}{N} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

με διακρίνουσα

$$\Delta = \left(\mu_{20} + \mu_{02}\right)^2 - 4\left(\mu_{20}\mu_{02} - \mu_{11}^2\right) = 0$$

ή

$$\Delta = \left(\mu_{20} - \mu_{02}\right)^2 + 4\mu_{11}^2 = 0 \Leftrightarrow \mu_{20} = \mu_{02} = \mu \;\&\; \mu_{11} = 0$$

Οπότε όταν ισχύει $\lambda_a = \lambda_b$, τότε

$$\mathbf{C}_r = \frac{\mu}{N}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Τότε λοιπόν οι ιδιοτιμές του πίνακα είναι $\lambda_a = \lambda_b = \mu/N$ και οποιοδήποτε διάνυσμα είναι ιδιοδάνυσμα του $\mathbf{C}_r$.

Παραδείγματα ΄περιοχών εικόνας με ίσες ιδιοτιμές είναι οι εικόνες δύο τόνων με συμμετρίες όπως ο κύκλος, το τετράγωνο, τα κανονικά πολύγωνα, κ.α.

Ορίζεται περιγράφον χαρακτηριστικό, το συντελεστή εκκεντρότητας της μορφής:

$$e = \frac{I_\Delta - I_\Pi}{I_\Delta + I_\Pi} = \frac{\lambda_\alpha - \lambda_b}{\lambda_\alpha + \lambda_b}$$

Για κάθε μορφή ισχύει: $0 \le e \le 1$

e=0 ισχύει για μορφές με ίσες ιδιοτιμές. Για παράδειγμα κύκλος, ισόπλευρο τρίγωνο, τετράγωνο

e>0 ισχύει για μορφές με άνισες ιδιοτιμές. Για παράδειγμα ισοσκελές τρίγωνο, έλλειψη.