ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

$$\left\{\begin{array}{l} x'e^t + y^2 = 5t^2 \\ y' + (x'')^2 = 7 \end{array}\right\}$$ Μη γραμμικό σύστημα

$$\left\{\begin{array}{l} 5x' - 6y' = 8 \\ 9x' + 7y' = 7 \end{array}\right\}$$ Γραμμικό Σύστημα

$$\left\{\begin{array}{l} x' = 7x + 8y - 2 \\ y' = 11x + 20y - 9 \end{array}\right\}$$ Γραμμικό Σύστημα

Λύση Γραμμικών

Μη Γραμμικά

Γραμμικά

Απαλοιφή

Τελεστή-D

Ιδιοτιμές

ΚΑΘΕ ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ ΜΠΟΡΕΙ ΝΑ ΓΡΑΦΘΕΙ ΣΑΝ ΣΥΣΤΗΜΑ

Έστω $y^{(n)} = F(x, y(x), y'(x), y''(x), \ldots, y^{(n-1)}(x))$

Ορίζουμε $w_1 = y$, $w_2 = y'$, $w_3 = y''$, …

… $w_n = y^{(n-1)}$, οπότε

$$\left.\begin{array}{l} w_1 = y \Rightarrow w_1' = y' = w_2 \\ w_2 = y' \Rightarrow w_2' = y'' = w_3 \\ \ldots \\ w_n = y^{(n-1)} \Rightarrow w_n' = y^{(n)} = F(x \ldots) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

άρα έχουμε το σύστημα

$$\left.\begin{array}{l} w_1' = w_2 \\ w_2' = w_3 \\ w_3' = w_4 \\ \ldots \\ w_n' = F(x, w_1, w_2, \ldots w_n) \end{array}\right\}$$

με αγνώστους τις συναρτήσεις $w_1, w_2, w_3, \ldots w_n$

Άσκηση: Να γραφεί σε σύστημα η

ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ Δ.Ε.

$$y_1' = a_{11}(x)y_1 + \dots + a_{1n}(x)y_n + g_1(x)$$

$$y_2' = a_{21}(x)y_1 + \dots + a_{2n}(x)y_n + g_2(x)$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$y_n' = a_{n1}(x)y_1 + \dots + a_{nn}(x)y_n + g_n(x)$$

Θέτοντας $\vec{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ το σύστημα γίνεται:

$$\boxed{\vec{Y}' = A(x)\vec{Y} + \vec{g}(x)}$$

που $A(x)$ ένας $n \times n$ πίνακας και $g(x) = \begin{pmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \\ \vdots \\ g_n(x) \end{pmatrix}$

$$\boxed{Y' = A(x)Y}$$ ομογενές σύστημα

__Θεώρημα:__ Αν $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$ είναι λύσεις του συστήματος, ανεξάρτητες, τότε και η

$c_1\varphi_1(x) + \dots + c_n\varphi_n(x)$

Άσκηση: Να λυθεί τό σύστημα

$$x'' + 2x - y = 0 \qquad (1)$$

$$y' - 6x + 3y = 1 \qquad (2)$$

Λύση: Θα απαλείψουμε τό y

$$(1) \rightarrow x''' + 2x' - y' = 0$$

$$(1) + (2) \rightarrow x''' + 2x' - y' + y' - 6x + 3y = 1$$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{l} x''' + 2x' - 6x + 3y = 1 \\ \text{αλλά} \quad y = x'' + 2x \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow x''' + 2x' - 6x + 3(x'' + 2x) = 1$$

$$\Longrightarrow \boxed{x''' + 3x'' + 2x' = 1}$$

Λύση της ομογενούς:

$$\lambda^3 + 3\lambda^2 + 2\lambda = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \lambda(\lambda^2 + 3\lambda + 2) = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -1, \quad \lambda_3 = -2$$

$$\Longrightarrow \boxed{x(t) = c_1 e^{0t} + c_2 e^{-t} + c_3 e^{-2t}}$$

Μερική λύση: $x_{\mu\varepsilon\rho} = A_1 t + A_0 \rightarrow$

$$(A_1 t + A_0)''' + 3(A_1 t + A_0)'' + 2(A_1 t + A_0)' = 1$$

$\Rightarrow A_1 = 1/2, \quad A_0 =$ οτιδήποτε $\Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \boxed{x_m = \frac{1}{2} t + 1} \Longrightarrow$$

$$\boxed{x(t) = c_1 + c_2 e^{-t} + c_3 e^{-2t} + \frac{1}{2} t + 1}$$

$$y(t) = x'' + 2x \Longrightarrow$$

$$\boxed{y(t) = 2c_1 + 6c_2 e^{-2t} + 3c_3 e^{-t} + 1}$$

Άσκηση: Να λυθεί το σύστημα:

$$x' + x + y' - y = t \quad (1)$$

$$x' + y'' = 1 \quad (2)$$

Λύση: $(1) \Rightarrow x'' + x' + y'' - y' = 1$

$\Rightarrow x'' + x' + y'' - y' - (x' + y'') = 1 - 1$

$\Rightarrow x'' - y' = 0 \rightsquigarrow \boxed{y' = x''}$

$\rightarrow y'' = x''' \xrightarrow{(2)} \boxed{x' + x''' = 1}$

Λύση ομογενούς $\quad \lambda^3 + \lambda = 0 \rightsquigarrow \lambda = 0, \lambda = \pm i$

$\Rightarrow \boxed{X(t) = c_1 e^{0t} + c_2 \sigma\upsilon\nu t + c_3 \eta\mu t}$

Μερική Λύση $\quad X_m(t) = A_1 t \rightsquigarrow$

$\rightsquigarrow A_1 = 1 \rightsquigarrow X_m = t \Rightarrow$

$$\boxed{X(t) = c_1 + c_2 \sigma\upsilon\nu t + c_3 \eta\mu t + t}$$

$\Rightarrow x'(t) = -c_2\, ημt + c_3\, συνt + 1$

$$\Downarrow$$

$x''(t) = -c_2\, συνt - c_3\, ημt$

$y' = x''(t)$. Αντικαθιστώντας στην

(1) έχουμε

$-c_2\, ημt + c_3\, συνt + 1 +$

$+ c_1 + \underline{c_2\, συνt} + \underline{c_3\, ημt} + \cancel{t} +$

$+ -\underline{c_2\, συνt} - \underline{c_3\, ημt} - y = \cancel{t}$

$\Rightarrow \boxed{y(t) = c_1 - c_2\, ημt + c_3\, συνt + 1}$

σκηση Να λυθεί με την μέθοδο των τελεστών D το σύστημα

$$\left.\begin{aligned} x' + x + y' - y &= t \\ x' + y'' &= 1 \end{aligned}\right\} \quad (\Sigma)$$

ύση:

$$(\Sigma) \rightarrow \begin{aligned} (D+1)x + (D-1)y &= t \\ Dx + D^2 y &= 1 \end{aligned}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} D+1 & D-1 \\ D & D^2 \end{vmatrix} = D^3 + D$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} t & D-1 \\ 1 & D^2 \end{vmatrix} = D^2 t - (D-1)1 =$$

$$= (t)'' - [(1)' - 1] =$$

$$= \underline{1}$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} D+1 & t \\ D & 1 \end{vmatrix} = (D+1)1 - Dt =$$

$$= 1' + 1 - t' = 0$$

άρα $$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{1}{D^3+D} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (D^3+D)x = 1 \Rightarrow \boxed{x''' + x' = 1}$$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{0}{D^3+D} \Rightarrow (D^3+D)y = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{y''' + y' = 0}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x(t) = c_1 + c_2\,\text{συν}\,t + c_3\,\text{ημ}\,t + 1 \\ \\ y(t) = c_1^* + c_2^*\,\text{συν}\,t + c_3^*\,\text{ημ}\,t \end{cases}$$

Άσκηση: Να λυθεί με την μέθοδο των τελεστών D το σύστημα:

$$2x' - y' - 4x = 2t$$

$$2x' + 4y' - 3y = 0$$

Λύση: $\left.\begin{aligned}(2D-4)x - Dy &= 2t\\ 2Dx + (4D-3)y &= 0\end{aligned}\right\} \Rightarrow$

$$\left.\begin{aligned}\Delta &= \begin{vmatrix} 2D-4 & -D \\ 2D & 4D-3 \end{vmatrix} = 10D^2 - 22D + 12\\ \Delta_x &= \begin{vmatrix} 2t & -D \\ 0 & 4D-3 \end{vmatrix} = 4(2t)' - 6t = 8-6t\\ \Delta_y &= \begin{vmatrix} 2D-4 & 2t \\ 2D & 0 \end{vmatrix} = -4D(t) = -4\end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} \Rightarrow x = \frac{8-6t}{10D^2 - 22D + 12} \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{5x'' - 11x' + 6x = 4 - 3t}$$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta} \Rightarrow y = \frac{-4}{10D^2 - 22D + 12} \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{5y'' - 11y' + 6y = -2}$$

Χαρακτηρ. εξίσωση: $5\lambda^2 - 11\lambda + 6 = 0$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 6/5 \Rightarrow$$

$$\boxed{\begin{aligned} X_{om} &= c_1 e^{t} + c_2 e^{6/5 t} \\ Y_{om} &= c_1^* e^{t} + c_2^* e^{6/5 t} \end{aligned}}$$

$$X_m = A_1 t + A_0 \rightarrow \boxed{X_m = -\frac{1}{2}t - \frac{3}{12}}$$

$$Y_m = B_0 \rightarrow \boxed{Y_m = -1/3}$$

$$\boxed{\begin{aligned} x(t) &= c_1 e^{t} + c_2 e^{6/5 t} - 1/2\, t - 3/12 \\ y(t) &= c_1^* e^{t} + c_2^* e^{6/5 t} - 1/3 \end{aligned}}$$

Η μέθοδος των ιδιοτιμών

$$\boxed{\Psi' = A\Psi + g(t)}$$

$$\boxed{\Psi_{ΓΕΝ} = \Psi_{ΟΜ} + \Psi_{ΜΕΡ}}$$

<u>Ομογενές σύστημα</u>

$$\boxed{\Psi' = A\Psi}$$

Βρίσκουμε τις <u>ιδιοτιμές</u>

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\nu$ και

$\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_\nu$ τα

αντίστοιχα <u>ιδιοδιανύσματα</u> και

έχουμε :

Περίπτωση 1η:

$$\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3 \neq \dots \neq \lambda_\nu \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow \Psi$ [redacted] $= c_1 e^{\lambda_1 t} \vec{u}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} \vec{u}_2 + \dots + c_\nu e^{\lambda_\nu t} \vec{u}_\nu$

Παράδειγμα

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}' = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$$

Ιδιοτιμές του A : $|A - \lambda I| = 0 \rightarrow$

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \rightarrow \boxed{\lambda_1 = 2,} \ \boxed{\lambda_2 = 3}$$

Ιδιοδιανύσματα $\boxed{\lambda_1 = 2 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}}$

$$\boxed{\lambda_2 = 3 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}} \Longrightarrow$$

$$\Psi_{om} = c_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + c_2 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \acute{\eta}$$

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t} \\ y(t) &= c_1(-2e^{2t}) - c_2 e^{3t} \end{aligned}$$

Περίπτωση $2^η$:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \dots = \lambda_\mu \neq \dots \neq \lambda_\nu \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \psi_{om} = c_1 e^{\lambda_1 t}\vec{u}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} t \vec{u}_2 + \dots$$

$$\dots c_\mu e^{\lambda_\mu t} t^{\mu-1}\vec{u}_\mu + \dots$$

__Παράδειγμα__ $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

__Ιδιοτιμές__ A : $|A-\lambda I| = 0 \rightarrow$

$\boxed{\lambda_1 = \lambda_2 = 4}$

__Ιδιοδιάνυσμα__ A : $\lambda_1 = 4 \rightarrow \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}$

$$\psi_{om} = c_1 e^{4t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 e^{4t} t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{aligned} x(t) &= c_1 e^{4t} + c_2 t e^{4t} \\ y(t) &= -c_1 e^{4t} - c_2 t e^{4t} \end{aligned}}$$

<u>Άσκηση</u> Να γραφεί σάν σύστημα η Δ.Ε.

$$\alpha y'' + \beta y' + \gamma y = 0$$

<u>Λύση</u> Ορίζουμε $z = y'$ οπότε

$$\alpha y'' + \beta y' + \gamma y \overset{=0}{} \Rightarrow \alpha z' + \beta z + \gamma y = 0$$

$$y' = z$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} z' = -\frac{\beta}{\alpha} z - \frac{\gamma}{\alpha} y \\ y' = z \end{matrix} = \begin{pmatrix} -\beta/\alpha & -\gamma/\alpha \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ y \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} z \\ y \end{pmatrix}' = A \begin{pmatrix} z \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\beta/\alpha - \lambda & -\gamma/\alpha \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow + \frac{\lambda\beta}{\alpha} + \lambda^2 + \gamma/\alpha = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha\lambda^2 + \beta\lambda + \gamma = 0}$$

αυτό είναι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο.

Μερική λύση

Έστω $\psi' = A\psi$ σύστημα

με λύσεις:

$$x_1(t) = c_1\varphi_{11}(t) + c_2\varphi_{12}(t) + \dots + c_\nu\varphi_{1\nu}(t)$$

$$x_2(t) = c_1\varphi_{21}(t) + c_2\varphi_{22}(t) + \dots + c_\nu\varphi_{2\nu}(t)$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$x_\nu(t) = c_1\varphi_{\nu 1}(t) + c_2\varphi_{\nu 2}(t) + \dots + c_\nu\varphi_{\nu\nu}(t)$$

Ορίζουμε:

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} \varphi_{11}(t) & \varphi_{12}(t) & \cdots & \varphi_{1\nu}(t) \\ \varphi_{21}(t) & \varphi_{22}(t) & \cdots & \varphi_{2\nu}(t) \\ \vdots & & & \vdots \\ \varphi_{\nu 1}(t) & \varphi_{\nu 2}(t) & \cdots & \varphi_{\nu\nu}(t) \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\psi_{\mu\varepsilon\rho} = \Phi(t)\int \Phi^{-1}(t)\, g(t)\, dt}$$

Άσκηση: Να λυθεί πλήρως το σύστημα

$$\boxed{\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}' = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Λύση: Λύση ομογενούς

Ιδιοτιμές $A \rightarrow \lambda_1 = 1 \rightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

Ιδιοδιανύσμ. $\lambda_2 = 6 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\psi_{om} = c_1 e^{t} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{6t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{\begin{aligned} x(t) &= c_1 \underline{4e^{t}} + c_2 \underline{e^{6t}} \\ y(t) &= c_1 \underline{e^{t}} + c_2 \underline{(-e^{6t})} \end{aligned}} \rightarrow$$

$$\rightarrow \Phi(t) = \begin{pmatrix} 4e^{t} & e^{6t} \\ e^{t} & -e^{6t} \end{pmatrix} \rightarrow \Phi^{-1} = \begin{pmatrix} e^{-t}/5 & e^{-t}/5 \\ \dfrac{e^{-6t}}{5} & -\dfrac{4}{5} e^{-6t} \end{pmatrix}$$

$$\psi_{\mu} = \Phi \int \Phi^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} dt = \boxed{\begin{pmatrix} -23/30 \\ -7/30 \end{pmatrix}}$$

Άσκηση: Η μεταβολή της τιμής ενός προϊόντος περιγράφεται από τις σχέσεις:

$$\frac{dP}{dt} = F(t) - a\left(S - S_0\right)$$

$$\frac{dS}{dt} = b\left(P - P_0\right) \quad \text{όπου}$$

$P(t)$: η τιμή $S(t)$: η προσφορά

P_0: αρχική τιμή S_0: αρχική προσφορά

$F(t)$: πληθωριστική επίδραση

[redacted]

[redacted] Εάν $a = 1$, $\beta = 1/2$, $F(t) = kt^2$, Βρείτε τύπο για την τιμή $P(t)$ και μελετείστε τον.

Λύση: Με απαλοιφή έχουμε

$$\left.\begin{aligned} P' &= kt^2 - (S - S_0) \\ S' &= \tfrac{1}{2}(P - P_0) \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{aligned} P'' &= 2kt - S' \\ S' &= \tfrac{P}{2} - \tfrac{P_0}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Longrightarrow 2kt - P'' = \frac{1}{2}P - \frac{1}{2}P_0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \boxed{P'' + \tfrac{1}{2}P = 2kt + \tfrac{1}{2}P_0}$$

$$\lambda^2 + 1/2 = 0 \rightsquigarrow \lambda_{1,2} = \pm i\,\sqrt{2}/2$$

$$\boxed{P_{om} = C_1 \,\text{συν}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t\right) + C_2\,\text{ημ}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t\right)}$$

$$P_{μερ} = A_1 t + A_0 \rightsquigarrow \frac{A_1}{2}t + \frac{A_0}{2} = 2kt + \frac{P_0}{2} \rightsquigarrow$$

$$\rightarrow A_1 = 4k,\quad A_0 = P_0 \rightarrow \boxed{P_m = 4kt + P_0} \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{P(t) = C_1\,\text{συν}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t\right) + C_2\,\text{ημ}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t\right) + 4kt + P_0}$$

Σχόλιο: $k = 0 \rightarrow P(t)$ φραγμένη

$k > 0 \rightarrow P(t) \rightsquigarrow +\infty$

$k < 0 \rightarrow P(t) \rightsquigarrow -\infty$

Εφαρμογές

Άσκηση: Να λυθεί η εξίσωση:

$$y'' - 5y' + 6y = 0$$

Λύση: Θέτοντας $w = y'$ έχουμε το διάνυσμα $\begin{pmatrix} w \\ y \end{pmatrix}$ και

$$\begin{pmatrix} w \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} w' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y'' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5y' - 6y \\ y' \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 5w - 6y \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ y \end{pmatrix}$$

$$|A - \lambda I| = 0 \rightarrow \boxed{\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0}$$

$$\lambda_1 = 2 \rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = 3 \rightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} w \\ y \end{pmatrix} = c_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{3t} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}}$$