Δ.Ε. του Bernoulli

$$\boxed{y'(x) + g(x)\,y(x) + h(x)\,y^{\rho}(x) = 0}$$

Επιλύεται με την αντικατάσταση

$$\boxed{Z(x) = y^{1-\rho}(x)}$$

από αυτήν έχουμε:

$$z = y^{1-\rho} \Longrightarrow z' = (1-\rho)\,y^{1-\rho-1}\,y' \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad y' = \frac{y^{\rho} z'}{1-\rho}$$

αλλά $y = z^{1/(1-\rho)}$

$$\Longrightarrow \boxed{y' = \frac{z^{\rho/(1-\rho)} \cdot z'}{1-\rho}}$$

Άσκηση: Να λυθεί η Δ.Ε.

$$xy' - y = y^2 \ln x$$

Λύση: Χρησιμοποιούμε τον μετασχηματισμό

$$z = y^{1-2} \Rightarrow z = y^{-1} \Rightarrow \boxed{y = \frac{1}{z}}$$

Αντικαθιστώντας έχουμε:

$$x\left(\frac{1}{z}\right)' - \frac{1}{z} = \left(\frac{1}{z}\right)^2 \ln x \Longrightarrow$$

$$\Rightarrow x\left(-\frac{z'}{z^2}\right) - \frac{1}{z} = \frac{1}{z^2}\ln x \xrightarrow[\text{με } z^2]{\text{πολλαπλασιάζουμε}}$$

$$\boxed{-xz' - z = \ln x}$$ Γραμμική 1ης τάξεως

(Β1) $-xz' - z = 0 \Longrightarrow \boxed{z(x) = \frac{c}{x}}$

(Β2) $-x\left(\frac{c}{x}\right)' - \frac{c}{x} = \ln x \Longrightarrow c = -x(\ln x + 1)$

$$\Rightarrow z_{\mu\varphi.}(x) = -(\ln x + 1) \Longrightarrow \boxed{z = \frac{c}{x} - (\ln x + 1)}$$

$$\Rightarrow \boxed{y^{-1}(x) = \frac{c}{x} - (\ln x + 1)}$$

41

Άσκηση: Να λυθεί η Δ.Ε.

$$y'(x) + 2x\,y(x) = 2x^3 y^3(x)$$

Λύση: Εδώ $p=3$ και χρησιμοποιούμε τον μετασχηματισμό $z = y^{1-3} \Rightarrow$

$$\Rightarrow z = y^{-2} \Rightarrow \boxed{y = z^{-1/2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y' = -\frac{1}{2} z^{-\frac{1}{2}-1} \cdot z' \Rightarrow \boxed{y' = -\frac{1}{2} z^{-3/2} z'}$$

Αντικαθιστώντας έχουμε:

$$-\frac{1}{2} z^{-3/2} z' + 2x z^{-1/2} = 2x^3 z^{-3/2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{-\frac{1}{2} z' + 2xz = 2x^3}$$ γραμμική Δ.Ε. $1^{ης}$ τάξεως

B1) $-\frac{1}{2} z' + 2xz = 0 \Rightarrow -\frac{dz}{2dx} = -2xz \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int \frac{dz}{z} = \int 4x\,dx \Rightarrow \ln z = 4\frac{x^2}{2} + k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{z = c_1 e^{2x^2}}$$

B2) $c_1 = \dots$, $z_{μερική} = \dots$ κ.λ.π.

$$z(x) = c_1 e^{2x^2} + z_μ \Rightarrow \boxed{y^{-2} = c_1 e^{2x^2} + z_{μερική}}$$

Solow - Model

$Q = \cancel{A} K^{a} L^{\beta} \qquad \alpha+\beta=1$

$\dot{K} = sQ$ μια σταθερή αναλογία του Q επενδύεται

$\dot{L} = \lambda L$ Το εργατικό δυναμικό αυξάνεται εκθετικά

$$Q = K^{a} L^{1-a} = L\left(\frac{K}{L}\right)^{a} = L k^{\alpha}, \quad k = \frac{K}{L}$$

$$\dot{k} = \frac{\dot{K}L - K\dot{L}}{L^2} = \frac{sQ\cdot L - K\lambda L}{L^2} = \frac{sLk^{a}L - K\lambda L}{L^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dot{k} = s k^{a} - \lambda k \Rightarrow \boxed{\dot{k} + \lambda k = s k^{\alpha}} \quad \text{(Bernoulli)}$$

$$z = k^{1-a} \Rightarrow \dot{z} = (1-a) k^{-a}\cdot \dot{k} \Rightarrow \dot{k} = \frac{\dot{z} k^{a}}{1-a}$$

$$\Rightarrow \frac{\dot{z} k^{a}}{1-a} + \lambda k = s k^{a} \Rightarrow \dot{z} + (1-a)\lambda k^{1-a} = s(1-a) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\dot{z} + (1-a)\lambda z = s(1-a)}$$

Ομογενής $\dot{z} + (1-a)\lambda z = 0 \Rightarrow \int \frac{dz}{z} = -(1-a)\lambda \int dt \Rightarrow$

$$\ln z = -(1-a)\lambda t + C_1 \Rightarrow z = C_1 e^{-(1-a)\lambda t} \Rightarrow$$

$z_{\mu\varphi} =$

$$\left[C_1 e^{-(1-a)\lambda t}\right]' + (1-a)\lambda C_1 e^{-(1-a)\lambda t} = s(1-a)$$

$$\Rightarrow C_1' e^{-(1-a)\lambda t} - C_1 (1-a)\lambda e^{-(1-a)\lambda t} + (1-a)\lambda C_1 e^{-(1-a)\lambda t} = s(1-a)$$

$$\Rightarrow C_1' = s(1-a) e^{(1-a)\lambda t} \Rightarrow C_1 = \int s(1-a) e^{(1-a)\lambda t} dt =$$

$$= s(1-a) \cdot \frac{1}{(1-a)\lambda} e^{(1-a)\lambda t} = \boxed{\frac{s}{\lambda} e^{(1-a)\lambda t}} \Rightarrow$$

$$\boxed{z_{\mu\varphi} = \frac{s}{\lambda}} \Rightarrow \boxed{z(t) = C_1 e^{-(1-a)\lambda t} + \frac{s}{\lambda}}$$

$$\Rightarrow k^{1-a} = C_1 e^{-(1-a)\lambda t} + \frac{s}{\lambda} \Rightarrow k = \sqrt[1-a]{C_1 e^{-(1-a)\lambda t} + s/\lambda}$$

$$t=0 \quad k(0) = k_0 \Rightarrow k_0 = \sqrt[1-a]{C_1 + s/\lambda} \Rightarrow k_0^{1-a} - s/\lambda = C_1$$

$$\boxed{k(t) = \sqrt[1-a]{\left[k_0^{1-a} - \frac{s}{\lambda}\right] e^{-(1-a)\lambda t} + \frac{s}{\lambda}}}$$

$$k(t) \to \sqrt[1-a]{\frac{s}{\lambda}}$$

τιμή ισορροπίας