Γραμμική Δ.Ε. $1^{ης}$ Τάξεως

$$\boxed{\alpha(x)\,y'(x) + b(x)\,y(x) = \gamma(x)} \quad (E)$$

- Το αριστερό τμήμα εκφράζει την εσωτερική δυναμική του υποδείγματος
- Το δεξιό τμήμα ($\gamma(x)$), την εξωτερική επίδραση.

Επίλυση

Βήμα $1^{ον}$: Λύνουμε την $\alpha(x)\,y'(x) + b(x)\,y(x) = 0$

Αυτή ονομάζεται ομογενής, $y_{om}(x)$.

Βήμα $2^{ον}$: Βρίσκουμε μια μερική λύση.

Θεωρούμε την $y_m = f(x, c_1)$, όπου η σταθερά c_1 θεωρείται ως συνάρτηση, και αντικαθιστούμε στην (E). Υπολογίζουμε την c_1

Βήμα $3^{ον}$

$$\boxed{Y_{ΓΕΝ} = Y_{om} + Y_m}$$

Άσκηση: Να λυθεί η Δ.Ε.

$$y'(x) + 5y(x) = 6 \qquad (E)$$

Λύση: Βήμα 1ον

$$y' + 5y = 0 \Rightarrow y' = -5y \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -5y$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{y} = -5dx \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = -5\int dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln|y| = -5x + K \Rightarrow \boxed{y_{ομ}(x) = c\,e^{-5x}}$$

Βήμα 2ον: Έστω $y = c(x)\,e^{-5x} \xRightarrow{(E)}$

$$\Rightarrow \left(c(x)\,e^{-5x}\right)' + 5\left(c(x)\,e^{-5x}\right) = 6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c'e^{-5x} - 5c\,e^{-5x} + 5c\,e^{-5x} = 6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c'e^{-5x} = 6 \Rightarrow c' = 6e^{5x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c(x) = \int 6e^{5x}dx \Rightarrow c = \frac{6}{5}e^{5x}$$

$$\Rightarrow y_μ = \frac{6}{5}e^{5x}\cdot e^{-5x} \Rightarrow \boxed{y_μ = \frac{6}{5}}$$

Βήμα 3ον:

$$\boxed{y(x) = c\,e^{-5x} + 6/5}$$

Άσκηση: Να λυθεί η Δ.Ε.

$$xy' + 4y = x^5 \quad (E)$$

Λύση:

Βήμα 1ο: λύνουμε την $xy' + 4y = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x\frac{dy}{dx} + 4y = 0 \Rightarrow \frac{dy}{y} = -4\frac{dx}{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{y} = -4\int\frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|y| = -4\ln|x| + k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{y_{om}(x) = \frac{c}{x^4}}$$

Βήμα 2ο: Έστω $y_m = \dfrac{c(x)}{x^4} \xRightarrow{(E)}$

$$x\cdot\left(\frac{c}{x^4}\right)' + 4\cdot\frac{c}{x^4} = x^5 \Rightarrow x\cdot\frac{c'x^4 - c4x^3}{x^8} +$$

$$+ 4\frac{c}{x^4} = x^5 \Rightarrow \frac{c'}{x^3} - 4\frac{c}{x^4} + 4\frac{c}{x^4} = x^5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{c'}{x^3} = x^5 \Rightarrow c = \frac{x^9}{9} \Rightarrow \boxed{y_m = \frac{x^5}{9}}$$

Βήμα 3ο:

$$\boxed{y_r = \frac{c}{x^4} + \frac{x^5}{9}}$$

Άσκηση: Η ελαστικότητα ζήτησης ε, ενός προϊόντος, ικανοποιεί την σχέση:

$$\varepsilon + 1 = \frac{p^2}{D} \quad (E1)$$

όπου p η τιμή και D η ζήτηση. Βρείτε την D.

Λύση: Γνωρίζουμε ότι $\varepsilon = \frac{D'p}{D} \Longrightarrow$

$$(E1) \Longrightarrow \frac{D'p}{D} + 1 = \frac{p^2}{D} \Longrightarrow \boxed{D'p + D = p^2}$$

Βήμα 1ον: $D'p + D = 0 \Longrightarrow \frac{dD}{dp}p = -D \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \int \frac{dD}{D} = -\int \frac{dp}{p} \Longrightarrow \ln D = -\ln p + K$$

$$\Longrightarrow \ln D = \ln c p^{-1} \Longrightarrow \boxed{D = \frac{c}{p}}$$

Βήμα 2ον: Έστω $D_m = \frac{c(p)}{p} \xrightarrow{(E1)} \left(\frac{c}{p}\right)' p + \frac{c}{p} = p^2$

$$\Longrightarrow \cancel{c(p)} \left(\frac{c}{p} \cdot p\right)' = p^2 \Longrightarrow c' = p^2 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow c = p^3/3 \Longrightarrow D_m = \frac{p^3/3}{p} = \frac{p^2}{3}$$

Βήμα 3ον: $\boxed{D = \frac{c}{p} + \frac{p^2}{3}}$

Άσκηση: Δίδεται ότι το κεφάλαιο $K = K(t)$ μεταβάλλεται σύμφωνα μέ τήν εξίσωση:

$$\frac{dK}{dt} = I(t) - aK(t)$$

όπου $I(t)$: οι επενδύσεις

a : συντελεστής χρήσεως

① Να βρεθεί τύπος γιά το $K(t)$.

② Δείξατε ότι, εάν $I(t) = I_0 =$ σταθερό, τότε, προϊόντος του χρόνου τό κεφάλαιο θα πλησιάζει τήν τιμή $\frac{I_0}{a}$.

Λύση: Β1 $\frac{dk}{dt} + aK = I(t) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{dk}{dt} + aK = 0 \Rightarrow \frac{dk}{k} = -a\,dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \frac{dk}{k} = -a\int dt \Rightarrow \ln K(t) = -at + \Lambda \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{K(t) = c\, e^{-at}}$$

Βήμα 2ον: Έστω ότι η C είναι συνάρτηση

$$K_m(t) = C(t)\, e^{-at} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(Ce^{-at}\right)' + a\left(Ce^{-at}\right) = I(t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C' e^{-at} - aCe^{-at} + aCe^{-at} = I(t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C = \int I(t)\, e^{at}\, dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{K_m = e^{-at} \int I(t)\, e^{at}\, dt}$$

Β 3ον

$$\boxed{K(t) = Ce^{-at} + e^{-at} \int I(t)\, e^{at}\, dt}$$

Εάν $I(t) = I_0 =$ σταθερό $\Longrightarrow$

$$K(t) = Ce^{-at} + e^{-at} I_0 \int e^{at}\, dt \Rightarrow$$

$$K(t) = Ce^{-at} + e^{-at} I_0 \frac{e^{at}}{a} = \boxed{Ce^{-at} + I_0/a}$$

$$\lim_{t \to +\infty} K(t) = \lim_{t \to +\infty} \left[Ce^{-at} + \frac{I_0}{a} \right] = \boxed{\frac{I_0}{a}}$$

Άσκηση: Έστω $Y(t)$ η συνάρτηση Εθνικού Εισοδήματος, $C(t)$ η κατανάλωση, $I(t)$ οι επενδύσεις και $G(t)$ η κυβερνητική παρέμβαση. Γνωρίζουμε ότι:

$$Y(t) = C(t) + I(t) + G(t)$$

Εάν η κατανάλωση είναι ανάλογη του εισοδήματος και οι επενδύσεις ανάλογες του οριακού εισοδήματος, βρείτε τό $Y(t)$ όταν $G(t) = G_0 =$ σταθερό.

Λύση: Ισχύουν οι σχέσεις:

$$\left.\begin{aligned} & Y(t) = C(t) + I(t) + G_0 \\ & C(t) = sY(t) \quad , \ s \text{ η ροπή προς κατανάλωση} \\ & I(t) = k\frac{dY}{dt} \quad , \ k \text{ επιταχυντής.} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad Y(t) = sY(t) + k\frac{dY}{dt} + G_0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{k\frac{dY}{dt} + (s-1)Y(t) = -G_0}$$

Βήμα 1ον

$$k Y' + (s-1) Y = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dY}{Y} = - \frac{(s-1)}{k} dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \frac{dY}{Y} = - \frac{(s-1)}{k} \int dt \Rightarrow \ln Y = - \frac{s-1}{k} t + \Lambda \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{Y_{om}(t) = C e^{-\frac{s-1}{k} \cdot t}}$$

Βήμα 2ον: Θεωρώ την C συνάρτηση.

$$k\left(C e^{-\frac{s-1}{k} t}\right)' + (s-1)\left(C e^{-\frac{s-1}{k} t}\right) = -G_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C' = \frac{-G_0 e^{\frac{s-1}{k} t}}{k} \Rightarrow \boxed{C = - \frac{G_0 e^{\frac{s-1}{k} t}}{s-1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{Y_m = - \frac{G_0}{s-1}}$$

και άρα η γενική λύση είναι

$$\boxed{Y(t) = C e^{-\frac{s-1}{k} t} - \frac{G_0}{s-1}}$$

Εάν $s>1$ τότε $Y(t) \rightsquigarrow$ σταθερό

$s<1$ " " $Y(t) \rightsquigarrow +\infty$

Άσκηση: Το συνεχές υπόδειγμα προσφοράς-ζήτησης. Έστω ότι η ζήτηση, η προσφορά και η τιμή είναι συναρτήσεις του χρόνου. Έστω ότι ισχύουν οι σχέσεις:

$$D(t) = a + \beta\, p(t) \quad , \; \beta < 0$$

$$S(t) = \gamma + \delta\, p(t) \quad , \; \delta > 0 \qquad (E)$$

Βρείτε έκφραση για την τιμή, εάν $p(0) = p_0$.

Λύση: Θεωρούμε ότι ο ρυθμός αύξησης της τιμής είναι ανάλογος της διαθέσιμης ποσότητος:

$$\frac{dp}{dt} = \lambda (D - S), \; \lambda > 0 \overset{(E)}{\Longrightarrow}$$

$$\Longrightarrow \frac{dp}{dt} - \lambda(\beta - \delta)\, p(t) = \lambda(\alpha - \gamma) \qquad (\star)$$

Αυτή είναι μία γραμμική διαφ. εξίσωση 1ης τάξεως.

Βήμα 1ον: $\dfrac{dp}{dt} - \lambda(\beta - \delta)\, p(t) = 0 \Longrightarrow$

$$\int \frac{dp}{p} = \int \lambda(\beta - \delta)\, dt \Longrightarrow \boxed{p(t) = c_1' e^{-\lambda(\delta - \beta)t}}$$

Προσοχή

Βήμα 2ον: Θεωρούμε τό C συνάρτηση του t.

$$\circledast \Longrightarrow \left[C e^{-\lambda(\delta-\beta)t}\right]' - \lambda(\beta-\delta)\left[C e^{-\lambda(\delta-\beta)t}\right] = \lambda(\alpha-\gamma)$$

$$\Longrightarrow C' = \lambda(\alpha-\gamma)\, e^{\lambda(\delta-\beta)t} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow C = \frac{\alpha-\gamma}{\delta-\beta}\, e^{\lambda(\delta-\beta)t} \Longrightarrow \boxed{P_m = \frac{\alpha-\gamma}{\delta-\beta}}$$

$$\Longrightarrow P(t) = \frac{\alpha-\gamma}{\delta-\beta} + C e^{-\lambda(\delta-\beta)t}$$

και χρησιμοποιώντας την αρχική συνθήκη

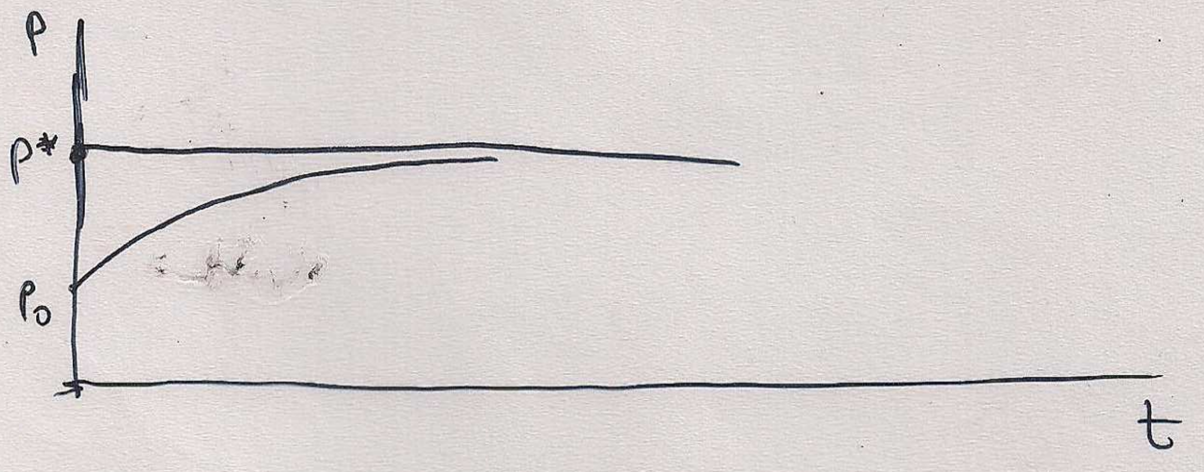
$P(0) = P_0$, έχουμε τελικά

$$\boxed{\begin{aligned} P(t) &= \frac{\alpha-\gamma}{\delta-\beta} + \left[P_0 - \frac{\gamma-\alpha}{\beta-\delta}\right] e^{-\lambda(\delta-\beta)t} \\ D(t) &= \alpha + \beta P(t) \\ S(t) &= \gamma + \delta P(t) \end{aligned}}$$

Σχόλια: ① Το παραπάνω υπόδειγμα είναι η δυναμική περιγραφή του Σταυρού του Marshall.

② Αφού $\delta>0$ και $\beta<0 \Rightarrow \delta>\beta \Rightarrow \delta-\beta>0$

$$\Rightarrow \lim_{t\to+\infty} p(t) = \frac{\alpha-\gamma}{\delta-\beta} = p^*$$



③ Το σημείο $p^* = \dfrac{\alpha-\gamma}{\delta-\beta}$, στο οποίο $\dfrac{dp}{dt}=0$ λέγεται σημείο ισορροπίας. Συμπίπτει με το σημείο ισορροπίας του Marschal.

④ Το p^* λέγεται ευσταθές σημείο, αφού $\lim_{t\to+\infty} p(t) = p^*$

Μερικές Παράγωγοι

① Επιλύσατε το πρόβλημα:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 4\frac{\partial u}{\partial y}, \quad u(0,y) = 8e^{-3y}$$

Λύση: $u = X \cdot Y \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = X'Y$

$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = X \cdot Y'$

$$\Rightarrow X' Y = 4 X \cdot Y' \Rightarrow \frac{X'}{X} = \frac{4Y'}{Y} = k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X' - Xk = 0 \Rightarrow X(x) = A e^{+kx}$$

$$4Y' - Yk = 0 \Rightarrow Y(y) = B e^{+\frac{k}{4}y}$$

$$\Rightarrow \boxed{u(x,y) = AB e^{+k(x+\frac{y}{4})}} \Rightarrow$$

$$u(0,y) = 8e^{-3y} \Leftrightarrow AB e^{+k\, y/4} = 8e^{-3y} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} AB = 8 \\ k = -12 \end{array}}$$

$$\Rightarrow \boxed{u(x,y) = 8e^{-12x-3y}}$$

$$\cancel{\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{x}{y}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{y}{x}=2}$$

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}=f} \Rightarrow \quad f=\alpha(x)\beta(y) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \alpha'(x)\beta(y)+\alpha(x)\beta'(y)=\alpha(x)\beta(y)$$

$$\frac{\alpha'(x)}{\alpha(x)}+\frac{\beta'(y)}{\beta(y)}=1 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha'(x)}{\alpha(x)}=\mu \quad \Rightarrow \quad \frac{d\alpha}{\alpha}=\mu\, dx \Leftrightarrow \ln\alpha=\mu x+c_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha=c_1 e^{\mu x}}$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \dfrac{\beta'(y)}{\beta(y)}=\lambda \\ \\ \mu+\lambda=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\beta=c_2 e^{(1-\mu)y}}$$

$$\Rightarrow \quad f=c_1 e^{\mu x} c_2 e^{y} e^{-\mu y} = \boxed{c\, e^{\mu x-\mu y+y}}$$

<u>Επαλήθευση</u>

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}=c\mu e^{\mu x-\mu y+y}+c(1-\mu)e^{\mu x-\mu y+y}=c\,e^{\mu x-\mu y+y}=f$$

Η συνάρτηση Cobb-Douglas

Άσκηση: Μία συνάρτηση παραγωγής Q, εξαρτάται από δύο παράγοντες: τό κεφάλαιο K και την εργασία L. Βρείτε μία έκφραση γιά τό Q.

Λύση: $Q = Q_{\text{λόγω κεφαλαίου}} + Q_{\text{λόγω εργασίας}}$

αλλά $Q_{\text{λόγω κεφαλαίου}} = K \cdot \dfrac{\partial Q}{\partial K}$

πράγματι, $\partial Q / \partial K$ η οριακή αλλαγή παραγωγής ως πρός K $\Longrightarrow$

Εάν το κεφάλαιο αυξηθεί κατά 1 τότε η παραγωγή $\dfrac{\partial Q}{\partial K}$

» » K » X;

$X = K \cdot \partial Q / \partial K$

Ομοίως βρίσκουμε ότι $Q_{\text{λόγω εργασίας}} = L \cdot \dfrac{\partial Q}{\partial L}$

$$\Longrightarrow \boxed{Q = K \frac{\partial Q}{\partial K} + L \frac{\partial Q}{\partial L}}, \quad Q;$$

Θεωρούμε ότι $Q(K,L) = f(K)\cdot g(L)$

Αντικαθιστώντας έχουμε:

$$K f'(K) g(L) + L f(K) g'(L) = f(K)\cdot g(L)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{K f'(K) g(L)}{f(K)\cdot g(L)} + \frac{L f(K)\cdot g'(L)}{f(K)\cdot g(L)} = 1$$

$\Longrightarrow \quad K \dfrac{f'(K)}{f(K)} + L \dfrac{g'(L)}{g(L)} = 1$, άρα ζητάμε

f και g έτσι ώστε

$\underline{K \dfrac{f'(K)}{f(K)} = a}$, $\underline{L \dfrac{g'(L)}{g(L)} = \beta}$ με $\underline{a+\beta=1}$

$K \dfrac{df/dK}{f} = a \Longrightarrow \displaystyle\int \frac{df}{f} = \int \frac{a}{K}\, dK \Rightarrow \ln f = a \ln K + C^*$

$\Longrightarrow \boxed{f(K) = C_1 K^a}$ ομοίως $\boxed{g(L) = C_2 L^\beta}$

άρα τελικά $\boxed{\begin{array}{c} Q(K,L) = C\, K^a L^\beta \\ \text{με } a+\beta=1 \end{array}}$ //