



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικόν και Καποδιστριακόν
Πανεπιστήμιον Αθηνών
ΤΜΗΜΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

Θεωρία Οικονομικής Μεγέθυνσης

Νίκος Θεοχαράκης

Ενδεικτικά θέματα Πρώτης Προόδου 5/4/2023

1. Ορίζουμε με $\dot{x}(t) \equiv dx(t)/dt$ την πρώτη παράγωγο μιας συνεχούς χρονικής μεταβλητής $x(t)$ ως προς τον χρόνο t . Ορίζουμε ως $\hat{x}(t) \equiv \dot{x}(t)/x(t)$ τον ρυθμό μεγέθυνσης αυτής της μεταβλητής. Αποδείξτε ότι ο ρυθμός μεγέθυνσης είναι ίσος με την πρώτη παράγωγο του φυσικού λογαρίθμου της μεταβλητής αυτής ως προς τον χρόνο, ότι δηλ., $\hat{x}(t) = d \ln x(t)/dt$.
2. Χρησιμοποιείτε το παραπάνω θεώρημα για να υπολογίσετε τον ρυθμό μεγέθυνσης του ΑΕΠ $Y(t)$ το οποίο καθορίζεται από την συνάρτηση Cobb-Douglas $Y(t) = A [K(t)]^\alpha [L(t)]^{1-\alpha}$ όπου $K(t)$ και $L(t)$ είναι κεφάλαιο και εργασία αντίστοιχα και τα οποία μεγεθύνονται με σταθερό εξωγενή ρυθμό κ και λ αντίστοιχα. [Υπόδειξη: Από την ερώτηση 1 χρησιμοποιήστε τη μέθοδο «λογαριθμίζω και παραγωγίζω» για να υπολογίσετε τους ρυθμούς μεγέθυνσης].
3. Το ΑΕΠ μιας χώρας μεγεθύνεται με σταθερό ρυθμό μεγέθυνσης 2,3% τον χρόνο. Υποθέτουμε ότι το ΑΕΠ είναι μια συνεχής χρονική μεταβλητή $y(t)$. Σε πόσα χρόνια θα **δεκαπλασιασθεί** το ΑΕΠ; Σε πόσα χρόνια θα **εκατονταπλασιασθεί**; Δίνεται ότι $\ln 10 = 2,3$.
4. Έστω ότι το πρώτο κρούσμα ενός ιού παρουσιάζεται την 1/1/2020. Μετά από έναν χρόνο έχουμε ένα εκατομμύριο κρούσματα. Τον δεύτερο χρόνο τα κρούσματα είναι δύο εκατομμύρια. Ποιος είναι ο μέσος ημερήσιος ρυθμός μεγέθυνσης τον πρώτο χρόνο; Ποιος είναι ο μέσος ημερήσιος ρυθμός μεγέθυνσης τον δεύτερο χρόνο; Ποιος είναι ο μέσος ημερήσιος ρυθμός μεγέθυνσης στα δύο πρώτα χρόνια; Υπολογίστε το για διακριτές και συνεχείς χρονικές μεταβλητές. Δίδεται ότι ο κάθε χρόνος έχει 365 ημέρες και ότι ο φυσικός λογάριθμος του 1.000.000 είναι περίπου 13,815 και των 2.000.000 είναι περίπου 14,509.
5. Ποια είναι η θεμελιώδης εξίσωση του υποδείγματος Harrod;
6. Είναι το υπόδειγμα Harrod ευσταθές; Είναι δυνατή η ύπαρξη ανεργίας στο υπόδειγμα Harrod;

7. Αν $\hat{L}(t) \equiv \dot{L}(t)/L(t) = n$ και $\hat{A}(t) \equiv \dot{A}(t)/A(t) = g$ υπολογίστε τους ρυθμούς μεγέθυνσης των $K(t)$ και $\tilde{k}(t)$ όπου $k(t) \equiv K(t)/(A(t)L(t))$, $\tilde{k}(t) \equiv K(t)/L(t)$, όταν $\dot{k}(t) = 0$
8. Έστω ένα υπόδειγμα Solow-Swan με τις συνήθεις υποθέσεις και σύμβολα των μεταβλητών. Η συνάρτηση παραγωγής στην εντατική μορφή είναι $y(t) = k(t)^\alpha$ όπου $y(t)$ είναι το προϊόν και $k(t)$ το κεφάλαιο ανά μονάδα αποτελεσματικής εργασίας $A(t)L(t)$ αντίστοιχα. Δίνεται ότι $s=0,3$, $n=0,02$, $g=0,03$, $\delta=0,05$ και $\alpha=0,5$
- Εξαγάγετε τη θεμελιώδη εξίσωση από τις βασικές παραδοχές του υποδείματος; (Υπόδειξη: υπολογίστε το $\dot{k} = \frac{d\left(\frac{K(t)}{A(t)L(t)}\right)}{dt}$)
 - Υπολογίστε τα σημεία ισορροπίας k^* , y^* για το υπόδειγμα (Αλγεβρικά και αριθμητικά).
 - Ποιο σημείο είναι ασταθές και ποιο ευσταθές; Αποδείξτε το.
 - Ποιοι είναι οι ρυθμοί μεγέθυνσης σε σταθερή κατάσταση του κεφαλαίου K^* και του προϊόντος Y^* , καθώς και του κατά κεφαλήν κεφαλαίου και προϊόντος \tilde{k}^* , \tilde{y}^* αντίστοιχα; [Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε την απάντησή σας στο ερώτημα 7].
 - Κατασκευάστε το διάγραμμα που δείχνει τα σημεία ισορροπίας.
 - Κατασκευάστε το διάγραμμα φάσης.
9. Τι είναι το ποσοστό αποταμίευσης στον **Χρυσό Κανόνα** (Golden Rule), s_{XK} ; Υπολογίστε το στη γενική περίπτωση $y(t) = f(k(t))$ και στην ειδική περίπτωση όπου $y(t) = k(t)^\alpha$.
10. Η μετάβαση από την κατάσταση ισορροπίας στην κατάσταση ισορροπίας του Χρυσού Κανόνα είναι κυρίαρχη κατά Pareto;
11. Τι συμβαίνει στο υπόδειγμα όταν μεταβάλλεται το ποσοστό (ροπή) αποταμίευσης s ; Μεταβάλλονται οι ρυθμοί μεγέθυνσης των μεταβλητών μας; Ποια η σημασία της μεταβολής του ποσοστού αποταμίευσης για τη μεγέθυνση;