Κεφάλαιο 9

Θεωρίες οικονομικής μεγέθυνσης

Ν. Σ. ΠΕΤΡΑΛΙΑΣ
Πανεπιστήμιο Αθηνών

Μαθηματικά προλεγόμενα με ειδικές αναφορές στη νεοκλασική θεωρία της παραγωγής και της διανομής *

* Σημειώσεις που διανέμονται δωρεάν στο Τμήμα Οικονομικών Επιστημών του Πανεπιστημίου Αθηνών. Για το θέμα της συνάρτησης παραγωγής βλέπε J. Felipe and JSL McCombie, 2001, How Sound are the Foundations of the Aggregate Production Function? University of Otago, Mimeo No 0116, New Zealand (με πλούσια βιβλιογραφία).

Μαθηματικά προλεγόμενα με ειδικές αναφορές στη νεοκλασική θεωρία της παραγωγής και της διανομής

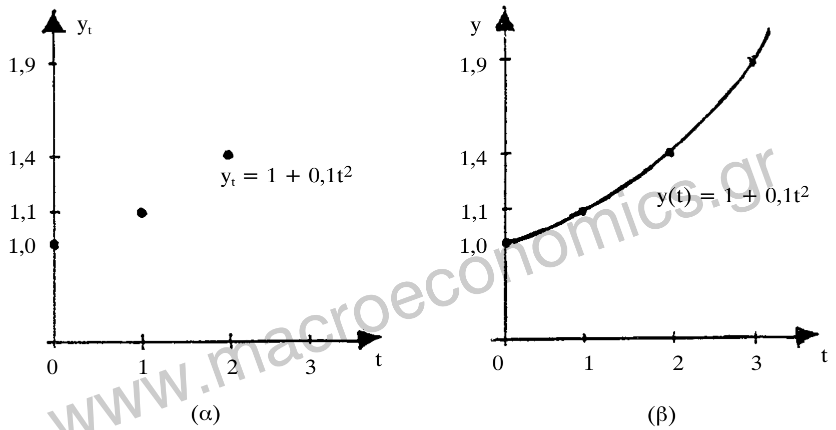
1. Διαχρονική μεταβολή και ρυθμοί μεγέθυνσης

1.1. Ορισμοί και συμβολισμοί

Όταν αποφασίζει κανείς να ασχοληθεί με το θέμα της οικονομικής μεγέθυνσης, θα πρέπει να του είναι ξεκάθαρο, από την αρχή, ότι θα έχει να κάνει με μεγέθη (όπως είναι λ.χ. το ΑΕΠ, το απόθεμα κεφαλαίου, οι επενδύσεις, το εργατικό δυναμικό, οι μισθοί, τα κέρδη κλπ.) τα οποία δεν παραμένουν σταθερά αλλά μεταβάλλονται συνεχώς στη διάρκεια του χρόνου. Θα έχει, δηλαδή, να κάνει με **χρονικές μεταβλητές**, των οποίων την πορεία στο πέρασμα του χρόνου προσπαθούμε να την συλλάβουμε αναλυτικά με την βοήθεια **χρονικών συναρτήσεων**. Πρόκειται για συναρτήσεις στις οποίες ως εξαρτημένη μεταβλητή εμφανίζεται το υπό παρατήρηση μέγεθος και ως ανεξάρτητη μεταβλητή ο χρόνος. Ο μαθηματικός συμβολισμός που χρησιμοποιούμε για την καταγραφή χρονικών συναρτήσεων διαφέρει, ανάλογα με το εάν η παρατηρούμενη χρονική μεταβλητή θεωρείται ότι είναι **διακριτή** ή **συνεχής**.

Εάν το μέγεθος μιας χρονικής μεταβλητής y μετριέται (ή ορίζεται) μόνον σε ορισμένες στιγμές του χρόνου και όχι στα ενδιάμεσα χρονικά διαστήματα (π.χ. μόνον στην αρχή ή στο τέλος κάθε έτους ή κάθε τριμήνου), τότε η μεταβλητή αυτή ονομάζεται **διακριτή**. Βέβαια, στον συμβολισμό y θα πρέπει τώρα να προσθέσουμε και τον δείκτη t και να γράφουμε y_t προκειμένου να σηματοδοτηθεί ότι πρόκειται για το μέγεθος της μεταβλητής y σε μια ορισμένη χρονική στιγμή t. Η συνάρτηση που καταγράφει την σειρά των αριθμητικών τιμών που παίρνει η μεταβλητή y σε δοσμένες χρονικές στιγμές t συμβολίζεται με $y_t = f(t)$, όπου $t = 0$ η αυθαίρετα καθορισμένη αρχή μέτρησης του χρόνου (π.χ. 1/1/1992) και $t = 0,1,2,3,\ldots$ οι διαδοχικές χρονικές στιγμές στις οποίες ορίζεται η μεταβλητή y, παίρνοντας αντίστοιχα τις τιμές y_0, y_1, y_2, y_3, ... Στους συμβολισμούς αυτούς έχουμε προφανώς υιοθετήσει δύο συμβατικές αρχές: πρώτον, ότι οι διαδοχικές στιγμές στις οποίες γίνεται η μέτρηση της μεταβλητής y απέχουν μεταξύ τους κατά το ίδιο χρονικό διάστημα και, δεύτερον, ότι το διάστημα αυτό ισούται με την μονάδα μέτρησης του χρόνου (π.χ. με την διάρκεια ενός ημερολογιακού έτους ή ενός τριμήνου). Σε ό,τι αφορά την συγκεκριμένη χρονική συνάρτηση $y_t = 1 + 0,1t^2$ της οποίας η γραφική παράσταση απεικονίζεται στο σχήμα 1.α. ισχύει, προφανώς, ότι η συνάρτηση αυτή αναφέρεται σε μια διακριτή μεταβλητή, αφού το μέγεθος της τελευταίας δεν ορίζεται σε όλες τις στιγμές του χρόνου t αλλά μόνον σε εκείνες που ανήκουν στο σύνολο των θετικών ακεραίων αριθμών, συμπεριλαμβανομένου και του μηδενός.

Εάν όμως το μέγεθος μιας χρονικής μεταβλητής y μπορεί να ορισθεί σε όλες ανεξαιρέτως τις στιγμές του χρόνου t (δηλαδή για όλο το συνεχές φάσμα των θετικών πραγματικών αριθμών και όχι μόνον για το ασυνεχές φάσμα των θετικών ακεραίων), τότε η μεταβλητή y ονομάζεται **συνεχής**. Στην περίπτωση αυτή, η συνάρτηση που καταγράφει την τιμή που παίρνει η μεταβλητή y σε κάθε χρονική στιγμή t συμβολίζεται με $y = f(t)$. Η γραφική παράστασή της είναι μια καμπύλη «χωρίς κενά», όπως φαίνεται και στο σχήμα 1.β., όπου έχει σχεδιαστεί το γράφημα της χρονικής συνάρτησης $y = 1 + 0,1t^2$.



Σχήμα 1.

Κάθε φορά που μας δίνεται μια χρονική μεταβλητή, η πρώτη σκέψη που μας έρχεται στο νου είναι να αναρωτηθούμε για το πώς είναι δυνατό να υπολογιστεί η διαχρονική της **μεταβολή** καθώς και η **ταχύτητα** με την οποία τείνει να μεταβάλλεται διαχρονικά η μεταβλητή αυτή. Να αναρωτηθούμε δηλαδή για τον τρόπο με τον οποίο μπορεί να οριστεί ένα μέτρο που θα μας δείχνει το πόσο γρήγορα ή αργά τείνει να μεταβάλλεται διαχρονικά το μέγεθος μιας διακριτής μεταβλητής στην διάρκεια μιας ορισμένης χρονικής περιόδου και, αντίστοιχα, το μέγεθος μιας συνεχούς μεταβλητής σε μια ορισμένη χρονική στιγμή. Στηριζόμενοι στην έννοια της «μέσης ταχύτητας» που την δανειζόμαστε από την Φυσική, θα λέγαμε, γενικά, ότι εάν σε ένα δοσμένο χρονικό διάστημα Δt το μέγεθος μιας μεταβλητής y αυξάνεται (ή μειώνεται) κατά το ποσό Δy, η μέση ταχύτητα με την οποία τείνει να μεταβάλλεται η μεταβλητή αυτή στο διάστημα Δt θα ισούται με τον λόγο $\Delta y/\Delta t$. Ο λόγος αυτός, που τον ονομάζουμε και μέση τάση μεταβολής της y, μας δείχνει την **απόλυτη μεταβολή** που υφίσταται το μέγεθος της μεταβλητής y σε ένα ορισμένο χρονικό διάστημα Δt.

Βέβαια, η αριθμητική τιμή του λόγου $\Delta y/\Delta t$ εξαρτάται τόσο από την μονάδα μέτρησης της μεταβλητής y όσο και από το μήκος του χρονικού διαστήματος Δt καθώς και από την μονάδα μέτρησής του. Ακόμα και στην περίπτωση που κατά την καταγραφή των μεταβολών της y χρησιμοποιείται πάντοτε το ίδιο χρονικό διάστημα και η ίδια μονάδα μέτρησής του, γεγονός είναι ότι μια ορισμένη τάση μεταβολής $\Delta y/\Delta t$ θα φαίνεται να είναι, άλλοτε ένας πολύ μεγάλος αριθμός και άλλοτε ένας πολύ μικρός αριθμός, ανάλογα με το εάν η μεταβλητή y μετριέται σε δραχμές, σε εκατομμύρια δραχμών, σε δολάρια ή σε χιλιάδες γεν. Το γεγονός αυτό αποτελεί, συχνά, πηγή δημιουργίας εσφαλμένων εντυπώσεων και δυσκολεύει κατά πολύ την δυνατότητα άμεσης σύγκρισης των διαχρονικών μεταβολών μιας μεταβλητής y με τις διαχρονικές μεταβολές μιας άλλης μεταβλητής x, της οποίας η μονάδα μέτρησης είναι διαφορετική από αυτήν της μεταβλητής x. Για τον λόγο αυτό, αντί να χρησιμοποιούμε την έννοια της μέσης τάσης μεταβολής (απόλυτη μεταβολή), προσφεύγουμε πολλές φορές στην έννοια της **σχετικής μεταβολής** της οποίας το μέγεθος δεν εξαρτάται από την μονάδα μέτρησης της μεταβλητής y ή x, καθότι ορίζεται ως η **ποσοστιαία μεταβολή** που παρουσιάζουν οι μεταβλητές αυτές στην διάρκεια ενός δοσμένου χρονικού διαστήματος Δt. Σύμφωνα με την μέθοδο υπολογισμού ποσοστών που μας είναι γνωστή από την απλή αριθμητική, ισχύει γενικά ότι, εάν μια μεταβλητή y έχει την τάση, κατά την διάρκεια του διαστήματος Δt, να αυξάνεται κατά $\Delta y/\Delta t$, τότε, στο διάστημα αυτό, η ποσοστιαία αύξησή της σε σχέση με την αρχική της τιμή y, δηλαδή ο ποσοστιαίος **ρυθμός μεγέθυνσής** της που τον συμβολίζουμε με g_y, θα ισούται με το πηλίκο

$$g_y = \frac{1}{y}\frac{\Delta y}{\Delta t}. \tag{1}$$

Εάν π.χ. σε μια δοσμένη χρονική στιγμή t το μέγεθος της y τυχαίνει να είναι 150 μονάδες ($y = 150$) και εάν σε ένα ορισμένο χρονικό διάστημα Δt, μετά την πάροδο της στιγμής t (π.χ. στους επόμενους τρεις μήνες), η μεταβλητή y αυξηθεί κατά 15 μονάδες ($\Delta y/\Delta t = 15$ μονάδες ανά τρίμηνο), τότε, στο διάστημα αυτό, η μεταβλητή y θα πρέπει να έχει αυξηθεί με έναν ρυθμό (ή κατά ένα ποσοστό) ίσο με: $(\Delta y/\Delta t)/y = 15/150 = 0{,}10 = 10\%$. Θα πρέπει να σημειωθεί ότι, στην οικονομική βιβλιογραφία, συνηθίζεται να παραλείπεται από τον ορισμό 1 η ρητή αναφορά στο χρονικό διάστημα Δt και να χρησιμοποιείται για τον ορισμό του ρυθμού μεγέθυνσης g_y ο συμβολισμός

$$g_y = \frac{\Delta y}{y}. \tag{1'}$$

Λόγω της συντομίας του, ο εναλλακτικός αυτός συμβολισμός είναι, από πρακτική πλευρά, πολύ βολικός. Από αναλυτική πλευρά δεν είναι ωστόσο και τόσο καθαρός, τουλάχιστον στον βαθμό που δεν διευκρινίζεται ότι πρόκειται για την ειδική περίπτωση όπου $\Delta t = 1$.

1.2. Διακριτές μεταβλητές

Στην περίπτωση διακριτών μεταβλητών, οι οποίες ορίζονται σε διαδοχικές στιγμές του χρόνου που απέχουν μεταξύ τους κατά μία μονάδα χρονικής διάρκειας (π.χ. κατά ένα έτος), ο παρονομαστής του κλάσματος $\Delta y/\Delta t$ ισούται, εξ ορισμού, με την μονάδα. Έτσι ο λόγος $\Delta y/\Delta t$, ο οποίος εκφράζει τώρα την μέση τάση μεταβολής της y στο χρονικό διάστημα $\Delta t = 1$, απλουστεύεται και γίνεται Δy. Ας συμβολίσουμε με y_t και y_{t+1} τις αριθμητικές τιμές της y σε δύο διαδοχικές χρονικές στιγμές t και $t+1$ (π.χ. στην αρχή του έτους 1998 και στην αρχή του έτους 1999). Η μέση τάση μεταβολής της y στην περίοδο t – που είναι το χρονικό διάστημα που αρχίζει την στιγμή t και τελειώνει την στιγμή $t+1$ (δηλαδή το έτος 1998, στο προηγούμενο παράδειγμα) – δίνεται προφανώς από την διαφορά: $\Delta y_t = y_{t+1} - y_t$. Ας σημειωθεί ότι προσθέσαμε στην έκφραση Δy τον δείκτη t προκειμένου να σηματοδοτήσουμε την περίοδο στην οποία αναφέρεται η μεταβολή της y. Η διαφορά $\Delta y_t = y_{t+1} - y_t$, που δεν είναι τίποτε άλλο παρά η **απόλυτη μεταβολή** που υφίσταται η μεταβλητή y στην περίοδο t, μπορεί βέβαια να είναι θετική, αρνητική ή και μηδενική, ανάλογα με το εάν, στην περίοδο t, η μεταβλητή y αυξήθηκε ($y_{t+1} > y_t$), μειώθηκε ($y_{t+1} < y_t$) ή έμεινε σταθερή ($y_{t+1} = y_t$).

Τροποποιώντας τώρα τον γενικό ορισμό 1, έτσι ώστε να μπορεί να εφαρμοστεί στην περίπτωση διακριτών μεταβλητών, όπου $\Delta t = 1$ και $\Delta y/\Delta t = y_{t+1} - y_t$, καταλήγουμε στο γνωστό μας από την αριθμητική συμπέρασμα ότι, για να υπολογιστεί ο ποσοστιαίος **ρυθμός μεγέθυνσης** μιας διακριτής μεταβλητής σε μια οποιαδήποτε χρονική περίοδο t, αρκεί να διαιρεθεί η απόλυτη μεταβολή της στην περίοδο t με την αριθμητική τιμή που είχε η μεταβλητή αυτή στην αρχή της περιόδου t[1]:

$$g_t = \frac{\Delta y_t}{y_t} = \frac{y_{t+1} - y_t}{y_t}. \tag{2}$$

Αυτά που είπαμε προηγουμένως σχετικά με το πρόσημο της απόλυτης μεταβολής Δy_t ισχύουν βέβαια και για το πρόσημο της σχετικής μεταβολής g_t. Ο ρυθμός μεγέθυνσης g_t θα είναι θετικός, αρνητικός ή μηδενικός, ανάλογα με το εάν η τελική τιμή y_{t+1} είναι μεγαλύτερη, μικρότερη ή ίση με την αρχική y_t. Ας σημειωθεί επίσης ότι, μετά την κατάλληλη αναδιάταξη των όρων του, ο ορισμός (2) μπορεί να αναδιατυπωθεί και να πάρει την ακόλουθη μορφή:

$$y_{t+1} = (1 + g_t)\, y_t. \tag{2΄}$$

Η έκφραση αυτή θα αποδειχθεί αρκετά χρήσιμη, καθότι μας προσφέρει την δυνατότητα να υπολογίζουμε το μέγεθος μιας μεταβλητής, στην αρχή μιας περιόδου, όταν μας δίνεται το μέγεθός της στην αρχή της προηγούμενης περιόδου καθώς και ο ρυθμός μεγέθυνσής της μεταξύ των δύο περιόδων.

---

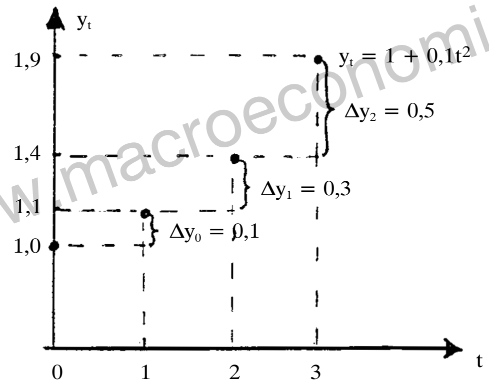
[1] Για να δείξουμε ότι πρόκειται για τον ρυθμό μεταβολής της μεταβλητής y (και όχι π.χ. μιας άλλης μεταβλητής x) θα έπρεπε, κανονικά, να προσθέταμε στον δείκτη του g_t και το σύμβολο y και να γράφαμε $g_{y,t}$. Όμως, για λόγους απλούστευσης των μαθηματικών συμβολισμών, θα εξακολουθήσουμε να γράφουμε g_t, υποθέτοντας πως από τα συμφραζόμενα προκύπτει σαφώς η ταυτότητα της μεταβλητής στην οποία αναφέρεται ο ρυθμός g_t.

Ας δούμε τώρα και την γεωμετρική ερμηνεία των εννοιών απόλυτη και σχετική μεταβολή, χρησιμοποιώντας ως παράδειγμα την χρονική συνάρτηση $y_t = 1 + 0,1t^2$, την οποία έχουμε ήδη απεικονίσει στο σχήμα 1.α. Στο σχήμα 2, το οποίο είναι αντιγραφή του σχήματος 1.α., έχουμε καταχωρήσει, για τις τρεις πρώτες περιόδους 0,1 και 2, τις απόλυτες μεταβολές $\Delta y_0 = 0,1$, $\Delta y_1 = 0,3$ και $\Delta y_2 = 0,5$. Σύμφωνα με τον ορισμό 2, οι αντίστοιχες τιμές του ρυθμού μεγέθυνσης της μεταβλητής y έχουν ως εξής:

$$g_0 = 0,1/1 = 0,1 = 10\%$$

$$g_1 = 0,3/1,1 = 0,27 = 27\%$$

$$g_2 = 0,5/1,4 = 0,36 = 36\%.$$



Σχήμα 2.

Οι υπολογισμοί αυτοί μας δείχνουν ότι, στην περίπτωση της χρονικής συνάρτησης $y_t = 1 + 0,1t^2$ ο ρυθμός μεγέθυνσης της μεταβλητής y δεν παραμένει σταθερός αλλά αυξάνεται διαρκώς, πράγμα που σημαίνει ότι η μεταβλητή y αυξάνεται, από περίοδο σε περίοδο, με επιταχυνόμενο ρυθμό.

1.3. Συνεχείς μεταβλητές

Ας εξετάσουμε τώρα την σημασία που αποκτούν οι έννοιες της απόλυτης και της σχετικής μεταβολής, όταν αυτές αναφέρονται σε συνεχείς μεταβλητές. Εάν y είναι μια συνεχής μεταβλητή και εάν $y = f(t)$ είναι η συνάρτηση που προσδιορίζει το μέγεθος της y σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή t, τότε το πηλίκο $\Delta y/\Delta t$, το οποίο το ταυτίσαμε προηγουμένως με την έννοια της μέσης ταχύτητας ή της μέσης τάσης μεταβολής της y, αντικαθίσταται τώρα – σύμφωνα με την βασική αρχή του διαφορικού λογισμού – από την έννοια της πρώτης παραγώγου της y ως προς t. Όπως θα θυμόμαστε, την πρώτη παράγωγο μιας συνάρτησης $y = f(t)$ την συμβολίζουμε με dy/dt ή με $f'(t)$ και την ορίζουμε ως το όριο του πηλίκου $\Delta y/\Delta t$, καθώς το Δt τείνει προς το μηδέν. Στο σημείο αυτό είναι σημαντικό να επισημανθεί ότι η αντικατάσταση του λόγου $\Delta y/\Delta t$ από την παράγωγο dy/dt μας επιβάλλει να τροποποιήσουμε, αντίστοιχα, και την χρονική αναφορά της έννοιας «μεταβολή». Επειδή η πρώτη παράγωγος dy/dt αναφέρεται στην τάση μεταβολής της y σε μια ορισμένη χρονική στιγμή και όχι σε μια ορισμένη χρονική περίοδο (όπως συμβαίνει με τον λόγο $\Delta y/\Delta t$), είναι αυτονόητο πως, στην περίπτωση συνεχών μεταβλητών, δεν έχει κανένα νόημα να μιλάει κανείς για την μέση τάση μεταβολής αλλά μόνον για την στιγμιαία. Συνεπώς, η **στιγμιαία τάση μεταβολής** μιας συνεχούς μεταβλητής σε μια δοσμένη χρονική στιγμή t (πράγμα που αντιστοιχεί στην απόλυτη μεταβολή μιας διακριτής μεταβλητής σε μια δοσμένη περίοδο t) θα ισούται με την αριθμητική τιμή που παίρνει, την στιγμή t, η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης $y = f(t)$ μέσω της οποίας περιγράφεται η διαχρονική πορεία της μεταβλητής y.

Το γεγονός ότι η στιγμιαία τάση μεταβολής της y, όπου $y = f(t)$, ισούται με $dy/dt = f'(t)$ μας επιτρέπει να υπολογίσουμε πολύ εύκολα και την στιγμιαία σχετική (ή ποσοστιαία) μεταβολή της y, δηλαδή τον στιγμιαίο ρυθμό μεγέθυνσής της, που τον συμβολίζουμε με g_y. Αντικαθιστώντας στον γενικό ορισμό 1 τον λόγο $\Delta y/\Delta t$ με dy/dt οδηγούμαστε αμέσως στο ακόλουθο συμπέρασμα. Για να υπολογισθεί ο **στιγμιαίος ρυθμός μεγέθυνσης** μιας συνεχούς μεταβλητής y $(= f(t))$ σε μια ορισμένη στιγμή t, θα πρέπει να διαιρεθεί η στιγμιαία τάση μεταβολής της y, που μας δίνεται από την πρώτη παράγωγο $dy/dt = f'(t)$, με την αριθμητική τιμή που παίρνει η μεταβλητή y την στιγμή t:

$$g_y = \frac{1}{y}\frac{dy}{dt} = \frac{f'(t)}{f(t)}. \tag{3}$$

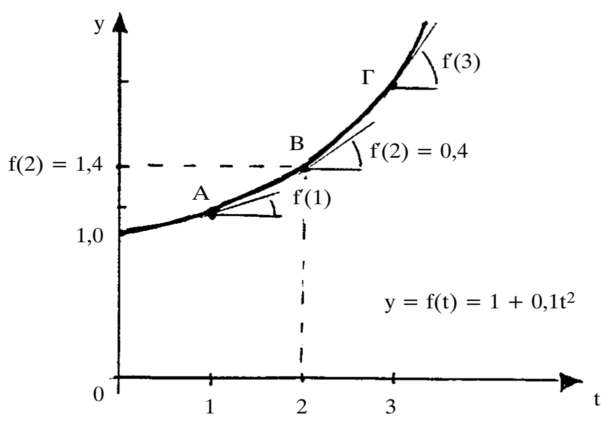
Επειδή είναι αυτονόητο ότι τα μεγέθη dy/dt και g_y ορίζονται με αναφορά σε μια ορισμένη χρονική στιγμή, έχει επικρατήσει η συνήθεια να μην θεωρείται οπωσδήποτε αναγκαίο, κάθε φορά που μιλάει κανείς για την τάση ή τον ρυθμό μεγέθυνσης μιας συνεχούς μεταβλητής, να προσθέτει και τον επιθετικό προσδιορισμό «στιγμιαίος». Ας σημειωθεί επίσης ότι, πολλές φορές, χρησιμοποιείται για την πρώτη παράγωγο μιας χρονικής συνάρτησης $y = f(t)$, αντί των γνωστών συμβολισμών dy/dt ή $f'(t)$, ο απλούστερος συμβολισμός $\dot{y}$, ο οποίος διαβάζεται ως «y-τελεία»:

$$\frac{dy}{dt} = f'(t) = \dot{y}.$$

Με βάση αυτόν το νέο τρόπο γραφής, ο ρυθμός μεγέθυνσης g_y εκφράζεται με το πηλίκο $\dot{y}/y$, το οποίο σηματοδοτείται συχνά με το ειδικό σύμβολο $\hat{y}$ (διάβαζε «y-σκεπή»). Έτσι, στην ειδική βιβλιογραφία, συνηθίζεται να χρησιμοποιούνται, εναλλακτικά, για τον ρυθμό μεγέθυνσης μιας συνεχούς μεταβλητής y, όπου $y = f(t)$, οι ακόλουθοι πέντε διαφορετικοί συμβολισμοί:

$$g_y = \frac{1}{y}\frac{dy}{dt} = \frac{f'(t)}{f(t)} = \frac{\dot{y}}{y} = \hat{y}\,.$$

Ας πούμε τώρα και δυο λόγια για την πρακτική εφαρμογή του ορισμού 3. Θα αναφερθούμε και πάλι στο παράδειγμα του σχήματος 1.β., υποθέτοντας ότι η διαχρονική πορεία που ακολουθεί η μεταβλητή y μας δίνεται από την συνάρτηση $y = 1 + 0{,}1t^2$. Για να υπολογίσουμε τον ρυθμό μεγέθυνσης της y σε μια ορισμένη χρονική στιγμή (π.χ. την στιγμή $t = 2$), ο ορισμός 3 μας υποδεικνύει ότι θα πρέπει να εκτελέσουμε μια σειρά μαθηματικών πράξεων. Κατ' αρχάς θα πρέπει να προσδιορίσουμε την πρώτη παράγωγο της $y = f(t)$, η οποία, στην περίπτωση της $y = 1 + 0{,}1t^2$ και σύμφωνα με τους απλούς κανόνες παραγώγισης, είναι η συνάρτηση $dy/dt = f'(t) = 0{,}2t$. Ας σημειωθεί ότι η συνάρτηση αυτή μας δείχνει και την κλίση της εφαπτομένης ευθείας σε οποιοδήποτε σημείο της καμπύλης $y = 1 + 0{,}1t^2$, την οποία έχουμε ξανασχεδιάσει στο σχήμα 3. Στη συνέχεια, θα πρέπει να υπολογίσουμε την αριθμητική τιμή της παραγώγου $f'(t)$ στην δοσμένη χρονική στιγμή $t = 2$ (βλ. σημείο B στο σχήμα 3). Αντικαθιστώντας στη συνάρτηση $f'(t) = 0{,}2t$ βρίσκουμε ότι η τάση μεταβολής της y την στιγμή $t = 2$ ισούται με 0,4 ($f'(2) = 0{,}2 \cdot 2 = 0{,}4$). Τελικά, ο ορισμός 3 μας υπαγορεύει ότι θα πρέπει να υπολογίσουμε και το μέγεθος της μεταβλητής y, όταν $t = 2$. Από την $y = f(t) = 1 + 0{,}1t^2$ προκύπτει ότι $f(2) = 1{,}4$. Έχοντας λοιπόν διαπιστώσει ότι $f'(2) = 0{,}4$ και $f(2) = 1{,}4$ συμπεραίνουμε, βάσει του ορισμού 3, πως η μεταβλητή y τείνει να μεγεθύνεται, την στιγμή $t = 2$, με έναν ρυθμό ίσο με $0{,}4/1{,}4 = 0{,}28$, δηλαδή με 28%.



Σχήμα 3.

Στο σημείο αυτό αξίζει να γίνει μια παρατήρηση που θα μας φανεί χρήσιμη αργότερα. Ξανακοιτάζοντας το σχήμα 3, διαπιστώνουμε αμέσως ένα σημαντικό μειονέκτημα της γραφικής παράστασης της χρονικής συνάρτησης $y = f(t)$. Ενώ μας επιτρέπει να εντοπίζουμε γεωμετρικά και σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή την τάση μεταβολής $f'(t)$ της μεταβλητής y, δεν μας επιτρέπει να κάνουμε το ίδιο και με τον ρυθμό μεγέθυνσής της (g_y). Συγκρίνοντας π.χ. την κλίση της εφαπτομένης ευθείας στα σημεία Α, Β και Γ, βλέπουμε την τάση μεταβολής της y – δηλαδή την πρώτη παράγωγο $f'(t)$ – να αυξάνεται συνεχώς με την πάροδο του χρόνου t. Όμως, από την γραφική παράσταση της $y = f(t)$ στο σχήμα 3 δεν μπορούμε να εκτιμήσουμε γεωμετρικά την διαχρονική συμπεριφορά του ρυθμού μεγέθυνσης της μεταβλητής y. Κατά την μετάβαση από το σημείο Α στο σημείο Β και από το σημείο Β στο σημείο Γ, βλέπουμε να αυξάνεται όχι μόνον η αριθμητική τιμή της πρώτης παραγώγου $f'(t)$ αλλά και το μέγεθος της ίδιας της μεταβλητής y. Τούτο σημαίνει ότι αυξάνεται ταυτόχρονα τόσο ο αριθμητής όσο και ο παρονομαστής του κλάσματος $f'(t)/f(t)$, με αποτέλεσμα να μην είναι καθόλου σαφές, από γεωμετρική σκοπιά, εάν αυξάνεται, μειώνεται ή παραμένει σταθερός ο ρυθμός μεγέθυνσης της μεταβλητής y, ο οποίος ισούται, εξ ορισμού, με το κλάσμα $f'(t)/f(t)$. Για να απαντηθεί το ερώτημα αυτό θα πρέπει να μελετηθεί η καμπύλη της συνάρτησης $g_y(t) = f'(t)/f(t)$, η οποία, στην περίπτωση του παραδείγματός μας, έχει την αρκετά σύνθετη μορφή: $g_y(t) = (0,2t)/(1+0,1t^2)$.

2. Ένας εναλλακτικός τρόπος υπολογισμού του ρυθμού μεγέθυνσης

2.1. Λογαριθμικές και εκθετικές συναρτήσεις

Στις επόμενες σελίδες θα θέλαμε να παρουσιάσουμε μια διαφορετική μέθοδο υπολογισμού του ρυθμού μεγέθυνσης, η οποία χρησιμοποιείται πολύ συχνά στην θεωρητική και εμπειρική βιβλιογραφία. Επειδή στηρίζεται στην έννοια των λογαριθμικών συναρτήσεων και των αντίστροφών τους, που είναι οι εκθετικές συναρτήσεις, η μέθοδος αυτή φαίνεται, αρχικά, να είναι κάπως περίπλοκη, ίσως και δυσνόητη. Τελικά, αποδεικνύεται όμως ότι είναι πολύ απλή στην εφαρμογή της και ότι διαθέτει σοβαρά αναλυτικά και υπολογιστικά πλεονεκτήματα. Όπως θα διαπιστώσουμε σε λίγο, ένα από τα πλέον σημαντικά πλεονεκτήματά της είναι ότι μας προσφέρει την δυνατότητα, υπό ορισμένους όρους, να παρακολουθούμε γεωμετρικά, χωρίς ενδιάμεσους υπολογισμούς, την διαχρονική συμπεριφορά του ρυθμού μεγέθυνσης μιας χρονικής μεταβλητής, παρακάμπτοντας έτσι το βασικό μειονέκτημα της υπολογιστικής μεθόδου, για την οποία έγινε λόγος προηγουμένως.

Αρχίζουμε υπενθυμίζοντας ορισμένες βασικές ιδιότητες της έννοιας του λογαρίθμου και, ιδιαίτερα, του φυσικού λογαρίθμου, τον οποίο τον συμβολίζουμε με $\log_e$ ή, απλούστερα, με ln. Όπως θα θυμόμαστε, ο φυσικός λογάριθμος ενός θετικού αριθμού y ορίζεται ως εκείνος ο αριθμός z, ο οποίος, εάν χρησιμοποιηθεί ως εκθέτης του άρρητου αριθμού $e = 2,71828\ldots$, θα μας δώσει ως αποτέλεσμα τον ίδιο τον αριθμό z[2]:

$$z = \ln y \Leftrightarrow y = e^z. \tag{4}$$

Σύμφωνα με την δεξιά πλευρά του ορισμού 4, η μεταβλητή y είναι μια απλή εκθετική συνάρτηση της z:

$$y = y(z) = e^z. \tag{5}$$

Πρόκειται προφανώς για μια συνάρτηση μονοτονική (σε κάθε διαφορετική τιμή της z αντιστοιχεί μια διαφορετική τιμή της y), η οποία χαρακτηρίζεται επίσης και από την ιδιότητα ότι η y παραμένει πάντοτε ένας θετικός αριθμός ($e^z > 0$), όποια και αν είναι η τιμή της z, θετική, αρνητική ή μηδενική. Η συνάρτηση 5 αποτελεί μια ειδική περίπτωση της γενικευμένης μορφής εκθετικών συναρτήσεων

$$y = Ae^{\varphi(z)}, \tag{6}$$

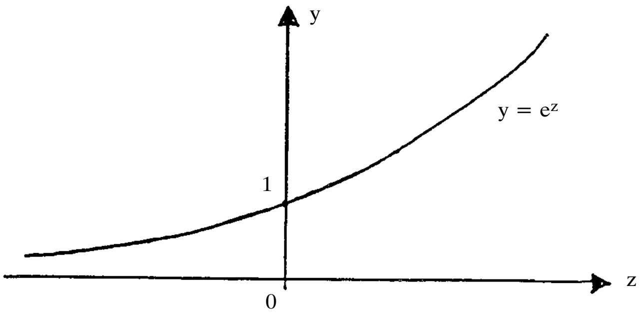
των οποίων η πρώτη παράγωγος ως προς z μας δίνεται από τον κανόνα

$$\frac{dy}{dz} = Ae^{\varphi(z)} \cdot \varphi'(z). \tag{7}$$

Σε ό,τι αφορά την απλή εκθετική συνάρτηση $y = e^z$ – για την οποία προφανώς ισχύει πως $A = 1$, $\varphi(z) = z$ και $\varphi'(z) = 1$ – προκύπτει από τον κανόνα 7 ότι η πρώτη παράγωγός της είναι η ίδια η συνάρτηση $e^z : d(e^z)/dz = e^z > 0$. Τούτο με τη σειρά του σημαίνει πως το ίδιο θα ισχύει και για την δεύτερη παράγωγο της $y = e^z$ και για την τρίτη κ.ο.κ.. Το γεγονός, ότι η πρώτη παράγωγος της $y = e^z$ είναι πάντοτε θετική, συνεπάγεται ότι η y θα είναι μια μονοτονική αύξουσα συνάρτηση της z (η οριακή μεταβολή της y θα είναι θετική καθώς αυξάνεται οριακά η z). Όμως, επειδή και η δεύτερη παράγωγος της $y = e^z$ ισούται και αυτή με e^z και είναι συνεπώς πάντοτε θετική, η y θα πρέπει να αυξάνεται όλο και πιο πολύ, καθώς αυξάνεται η z. Από άποψη γεωμετρική, η θετικότητα της πρώτης και της δεύτερης παραγώγου της $y = e^z$ συνεπάγεται ότι η γραφική απεικόνιση της τελευταίας θα είναι μια προς τα πάνω κυρτή καμπύλη (βλ. σχήμα 4), για την οποία θα ισχύει επιπλέον ότι θα τέμνει τον κάθετο άξονα στο σημείο 1 ($e^0 = 1$) και ότι θα παραμένει πάντοτε πάνω από τον οριζόντιο άξονα ($e^z > 0$), πλησιάζοντάς τον ασυμπτωτικά, καθώς η z θα τείνει προς το $-\infty$ ($e^z \to 0$, όταν $z \to -\infty$).

---

[2] Πολλές φορές χρησιμοποιείται, αντί του συμβολισμού $y = e^z$, ο συμβολισμός $y = \exp(z)$.



Σχήμα 4.

Ας επανέλθουμε τώρα στον ορισμό 4 και ας εξετάσουμε την αριστερή του πλευρά. Αυτό που συμβαίνει εδώ είναι ότι αντιστρέφεται η συνάρτηση $y = y(z) = e^z$ η οποία έχει ήδη προσδιοριστεί στην δεξιά πλευρά του ορισμού 4. Ο εκθετικός συσχετισμός μεταξύ της y και της z εξακολουθεί να ισχύει, με την μόνη διαφορά ότι τώρα η εξίσωση $y = e^z$ «επιλύεται ως προς z», με αποτέλεσμα να είναι η z που εκφράζεται ως συνάρτηση της y και μάλιστα ως συνάρτηση λογαριθμική της πιο απλής μορφής, όπου η z ορίζεται ως ο φυσικός λογάριθμος της y:

$$z = z(y) = \ln y\,. \tag{8}$$

Η έκφραση 8 δεν μας προσφέρει τίποτε το καινούργιο. Το μόνο που μας λέγει είναι ότι, εάν μας δοθεί μια ορισμένη τιμή της y και μας ζητηθεί να προσδιορίσουμε τον φυσικό λογάριθμό της, θα πρέπει να απευθυνθούμε στην δεξιά πλευρά του ορισμού 4 – ή εναλλακτικά στο σχήμα 4 – και να προσπαθήσουμε να εντοπίσουμε εκεί την συγκεκριμένη τιμή που θα πρέπει να πάρει ο εκθέτης της συνάρτησης $y = e^z$, ώστε να προκύψει ο δοσμένος αριθμός y[3]. Αφού λοιπόν ο φυσικός λογάριθμος ενός αριθμού y δεν είναι τίποτε άλλο παρά η δύναμη στην οποία θα πρέπει να υψωθεί ο αριθμός $e = 2,71828\ldots$ προκειμένου να προκύψει και πάλι ο αριθμός y, μπορούμε να ενσωματώσουμε την αριστερή πλευρά του ορισμού 4 στην δεξιά του πλευρά και να αποκτήσουμε έτσι την έκφραση

$$y = e^{\ln y}, \tag{9}$$

η οποία, αν και αποτελεί απλώς μια ταυτολογία[4], αποδεικνύεται πολύ χρήσιμη, όπως θα δούμε αμέσως τώρα, στην περίπτωση που τίθεται θέμα υπολογισμού του φυσικού λογάριθμου ενός συνδυασμού αριθμών.

---

[3] Δεν είναι βέβαια αναγκαίο, κάθε φορά που θέλουμε να προσδιορίσουμε τον φυσικό λογάριθμο ενός αριθμού y, να «επιλύουμε» την εξίσωση $y = e^z$ ως προς z, πράγμα που έτσι ή αλλιώς δεν είναι και τόσο εύκολο, αφού αυτό μπορεί να επιτευχθεί μόνον προσεγγιστικά με την βοήθεια του αναπτύγματος Maclaurin. Ευτυχώς για μας, όλοι αυτοί οι υπολογισμοί έχουν γίνει, εδώ και πολύ καιρό, από άλλους και τα αποτελέσματά τους μπορεί εύκολα να τα βρει κανείς στους γνωστούς μας «πίνακες φυσικών λογαρίθμων».

[4] Εάν λ.χ. $y = e^3$, τότε ταυτολογικά θα πρέπει να ισχύει και ότι $\ln y (= \ln e^3) = 3$.

Πώς μπορεί π.χ. να υπολογίσει κανείς τον λογάριθμο του γινομένου δύο αριθμών α και β; Για τους λογάριθμους των α και β θα πρέπει, σύμφωνα με την ταυτολογία 9, να ισχύει: $\alpha = e^{\ln\alpha}$ και $\beta = e^{\ln\beta}$. Από τον πολλαπλασιασμό των δύο αυτών εκφράσεων προκύπτει η έκφραση

$$\alpha\beta = e^{\ln\alpha}e^{\ln\beta} = e^{\ln\alpha+\ln\beta},$$

η οποία συνεπάγεται, πάλι βάσει της 9, ότι **ο λογάριθμος του γινομένου** δύο (ή και περισσότερων) ισούται με το άθροισμα των λογαρίθμων τους:

$$\ln(\alpha\beta) = \ln\alpha + \ln\beta. \tag{10}$$

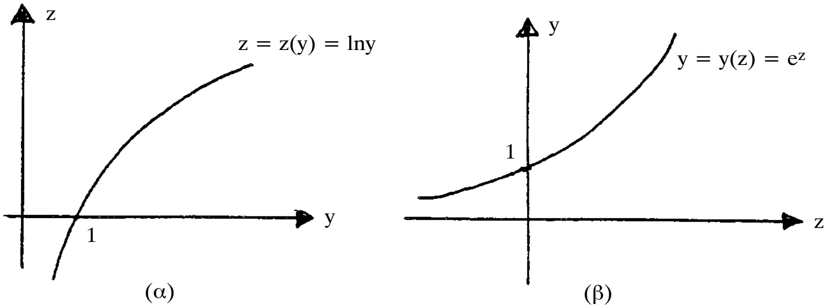
Κατ' ανάλογο τρόπο μπορεί κανείς να αποδείξει επίσης και την ισχύ ενός άλλου γνωστού κανόνα, σύμφωνα με τον οποίο ο **λογάριθμος του πηλίκου** δύο αριθμών ισούται με την διαφορά των λογαρίθμων τους:

$$\ln(\alpha/\beta) = \ln\alpha - \ln\beta. \tag{11}$$

Τελικά, μπορεί κανείς το ίδιο εύκολα να αποδείξει και την ισχύ ενός τρίτου κανόνα, σύμφωνα με τον οποίο ο **λογάριθμος της δύναμης** β^{α} ισούται με το γινόμενο του εκθέτη και του λογαρίθμου της βάσης β:

$$\ln(\beta^{\alpha}) = \alpha\ln\beta. \tag{12}$$

Μετά από αυτήν την σύντομη παρένθεση θα θέλαμε να επανέλθουμε για λίγο στην λογαριθμική συνάρτηση 8. Έχοντας υπόψη τα όσα είπαμε προηγουμένως σχετικά με την καμπύλη της εκθετικής συνάρτησης $y = y(z) = e^{z}$, είναι σαφές ότι δεν χρειάζεται και πολλή σκέψη για να σχεδιαστεί και η καμπύλη της λογαριθμικής συνάρτησης $z = z(y) = \ln y$. Αφού αυτή είναι η αντίστροφη της εκθετικής συνάρτησης, η καμπύλη της θα είναι παρόμοια με την καμπύλη της εκθετικής συνάρτησης (που την σχεδιάσαμε στο σχήμα 4 και την επανασχεδιάζουμε στο σχήμα 5.β.). Μόνον που τώρα θα έχει αντιστραφεί η εικόνα, μιας και έχουν αντιστραφεί οι ρόλοι των αξόνων. Τώρα (βλ. σχήμα 5.α. σε σύγκριση με σχήμα 5.β.) η z θα είναι η εξαρτημένη μεταβλητή (κάθετος άξονας) και η y η ανεξάρτητη μεταβλητή (οριζόντιος άξονας). Συνεπώς, η καμπύλη της λογαριθμικής συνάρτησης $z = \ln y$ θα είναι αύξουσα μονοτονική και θα τέμνει τον οριζόντιο άξονα στο σημείο 1 ($\ln 1 = 0$, αφού $e^{0} = 1$). Θα βρίσκεται πάντοτε στην δεξιά πλευρά του κάθετου άξονα – καθότι είναι αδύνατο να ορισθούν λογάριθμοι για μη θετικούς αριθμούς ($y > 0$, αφού $e^{z} > 0$) – και θα τον πλησιάζει ασυμπτωτικά καθώς η y θα τείνει προς το μηδέν. Όμως, σε αντίθεση με την καμπύλη της εκθετικής συνάρτησης που είναι κυρτή προς τα πάνω, η καμπύλη της λογαριθμικής συνάρτησης θα είναι κυρτή προς τα κάτω. Τούτο σημαίνει ότι ο λογάριθμος μιας μεταβλητής y αυξάνεται με **φθίνοντα ρυθμό** καθώς αυξάνεται η αριθμητική τιμή της y.



Σχήμα 5.

Τελικά, θα πρέπει να σημειωθεί επίσης ότι τα δύο γραφήματα, που έχουν σχεδιαστεί δίπλα-δίπλα στο σχήμα 5, αποτελούν, ουσιαστικά, την γραφική απεικόνιση των δύο πλευρών του ορισμού 4.

2.2. Ο λογαριθμικός μετασχηματισμός χρονικών συναρτήσεων

Έχουμε φτάσει σε ένα σημείο από το οποίο μπορούμε πια να δούμε πώς είναι δυνατό να χρησιμοποιηθεί η έννοια των φυσικών λογαρίθμων προκειμένου να διευκολυνθεί η μελέτη χρονικών συναρτήσεων. Κατ' αρχάς, μια προκαταρκτική παρατήρηση. Εάν μας δοθεί μια χρονική συνάρτηση $y=f(t)$, μπορούμε, για οποιαδήποτε χρονική στιγμή t^*, να υπολογίσουμε την αντίστοιχη αριθμητική τιμή y^* της μεταβλητής y ($y^*=f(t^*)$) και, στη συνέχεια, να χρησιμοποιήσουμε τους πίνακες των φυσικών λογαρίθμων και να βρούμε τον συγκεκριμένο εκείνο αριθμό z^* που θα είναι ο λογάριθμος της τιμής y^* που παίρνει η μεταβλητή y στην συγκεκριμένη χρονική στιγμή t^* ($z^*=\ln y^*$). Τον υπολογισμό αυτό θα μπορούσαμε, θεωρητικά, να τον επαναλάβουμε για όλες τις στιγμές του χρόνου t, αποκτώντας έτσι μια πλήρη εικόνα της συναρτησιακής σχέσης μέσω της οποίας συνδέεται, έμμεσα, η μεταβλητή z με την μεταβλητή t. Γενικεύοντας την παρατήρηση αυτή θα λέγαμε ότι, αφού η μεταβλητή y είναι μια συνάρτηση του χρόνου t ($y=f(t)$) και αφού η μεταβλητή z είναι μια συνάρτηση της μεταβλητής y ($z=z(y)=\ln y$), θα πρέπει και η μεταβλητή z να μπορεί να εκφραστεί άμεσα ως συνάρτηση του χρόνου t ($z=\ln y=\ln f(t)=z(t)$), χωρίς τη μεσολάβηση της μεταβλητής y[5]. Η συλλογιστική αυτή μας δίνει τη δυνατότητα, βέβαια στον βαθμό που το θεωρούμε σκόπιμο, να χρησιμοποιούμε, αντί της χρονικής συνάρτησης $y=f(t)$, τον **λογαριθμικό μετασχηματισμό** της, που είναι η χρονική συνάρτηση $z=\ln f(t)$.

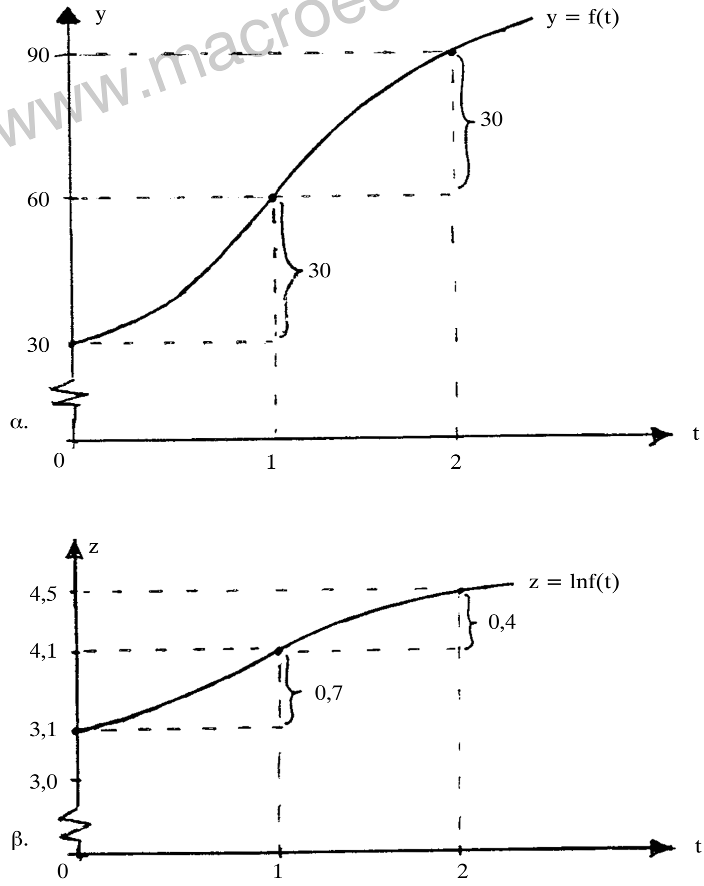
---

[5] Το συμπέρασμα αυτό προϋποθέτει την μονοτονικότητα της συνάρτησης $z=z(y)$, πράγμα που οπωσδήποτε ισχύει, όπως είδαμε προηγουμένως, στην περίπτωση της λογαριθμικής συνάρτησης $z=\ln y$.

Για να εκτιμήσουμε τις διευκολύνσεις που μας προσφέρει η χρήση της συνάρτησης $z = \ln f(t)$ αντί της συνάρτησης $y = f(t)$, θα πρέπει να αρχίσουμε συγκρίνοντας τις γραφικές τους παραστάσεις. Επειδή δεν έχει και πολύ νόημα, την στιγμή αυτή, να χρησιμοποιήσουμε κάποια συγκεκριμένη συνάρτηση $y = f(t)$ και να εμπλακούμε σε χρονοβόρες αριθμητικές πράξεις με λογαρίθμους, θα υποθέσουμε ότι μας δίνεται η γραφική παράσταση της $y = f(t)$ και ότι η παράσταση αυτή έχει περίπου την μορφή της καμπύλης που απεικονίζεται στο σχήμα 6.α.. Θα υποθέσουμε επίσης ότι, στις τρεις διαδοχικές στιγμές $t = 0$, $t = 1$ και $t = 2$ οι αριθμητικές τιμές της μεταβλητής y τυχαίνει να είναι αντίστοιχα $f(0) = 30$, $f(1) = 60$ και $f(2) = 90$. Ακριβώς κάτω από την γραφική παράσταση της $y = f(t)$ έχουμε σχεδιάσει και μια άλλη γραφική παράσταση (βλ. σχήμα 6.β.), που απεικονίζει την καμπύλη του λογαριθμικού μετασχηματισμού της $y = f(t)$, δηλαδή την καμπύλη $z = \ln f(t)$, την οποία, θεωρητικά, μπορούμε να την κατασκευάσουμε από την καμπύλη $y = f(t)$, ακολουθώντας την υπολογιστική διαδικασία που περιγράψαμε μόλις πριν από λίγο. Το βασικό συμπέρασμα, στο οποίο θέλουμε να καταλήξουμε εδώ – ένα συμπέρασμα που το έχουμε ήδη προκαταλάβει στο σχήμα 6.β., δίνοντας στην καμπύλη $z = \ln f(t)$ μια μορφή που να «μοιάζει κάπως» με την μορφή της καμπύλης $y = f(t)$ –, είναι ότι η καμπύλη της $z = \ln f(t)$ αποτελεί μια **συστηματικά «παραμορφωμένη»** εκδοχή της καμπύλης της $y = f(t)$, με την ακόλουθη διττή σημασία του όρου: πρώτον, για κάθε τιμή του t, το ύψος της $\ln f(t)$ θα είναι πάντοτε πιο χαμηλό από το αντίστοιχο ύψος της $f(t)$ και η διαφορά τους θα γίνεται όλο και πιο μεγάλη, όσο αυξάνεται το t και, δεύτερον, για κάθε τιμή του t, η κλίση της $\ln f(t)$ θα είναι πάντοτε πιο μικρή από την αντίστοιχη κλίση της $f(t)$ και η διαφορά τους θα αυξάνεται, καθώς θα αυξάνεται το t.

Πριν όμως εξετάσουμε την ιδιάζουσα αυτή σχέση ανάμεσα στις καμπύλες των δύο διαγραμμάτων του σχήματος 6, θα πρέπει να επισημανθεί ότι και τα δύο διαγράμματα απεικονίζουν τον ίδιο συσχετισμό, με μία μόνο διαφορά: ενώ στον κάθετο άξονα του πρώτου διαγράμματος καταγράφεται η αριθμητική τιμή της μεταβλητής y σε κάθε χρονική στιγμή t, στον κάθετο άξονα του δεύτερου διαγράμματος καταγράφεται ο λογάριθμος της αριθμητικής τιμής που παίρνει η μεταβλητή y σε κάθε χρονική στιγμή t. Πρόκειται δηλαδή για μια διαφορά που οφείλεται στην **διαφορετική κλίμακα** που χρησιμοποιείται κάθε φορά για να μετρηθεί η μεταβλητή y. Εάν π.χ. διαβάζαμε στον κάθετο άξονα του πρώτου διαγράμματος την μέτρηση 50 ή 100 μονάδες, αυτό που θα διαβάζαμε στον κάθετο άξονα του δεύτερου διαγράμματος θα ήταν, αντίστοιχα, οι αριθμοί 3,91 και 4,61 (οι πίνακες των φυσικών λογαρίθμων μας πληροφορούν ότι οι λογάριθμοι των αριθμών 50 και 100 είναι, περίπου, 3,91 και 4,61).

Αφού, λοιπόν, μας δίνεται στο σχήμα 6.α. ότι στις χρονικές στιγμές 0, 1 και 2 οι τιμές της μεταβλητής y είναι $f(0) = 30$, $f(1) = 60$ και $f(2) = 90$, οι αντίστοιχες τιμές της μεταβλητής z $(= \ln f(t))$ στο σχήμα 6.β. θα πρέπει να είναι κατά προσέγγιση: $\ln 30 = 3,4$, $\ln 60 = 4,1$ και $\ln 90 = 4,5$. Επειδή, όπως φαίνεται εξάλλου και από το αριθμητικό αυτό παράδειγμα, η αριθμητική τιμή του λογαρίθμου ενός αριθμού είναι πάντοτε μικρότερη από τον ίδιο τον αριθμό, η καμπύλη $z = \ln f(t)$ στο σχήμα 6.β. θα πρέπει να βρίσκεται σε πολύ πιο χαμηλή θέση σε σύγκριση με την καμπύλη $y = f(t)$ στο σχήμα 6.α.. Έχει όμως ήδη επισημανθεί (βλ. σχήμα 5.α.) ότι η λογαριθμική συνάρτηση $z = \ln y$, που συνδέει την μεταβλητή z με την μεταβλητή y, είναι κυρτή προς τα κάτω, πράγμα που σημαίνει ότι η μεταβλητή z θα αυξάνεται με φθίνοντα ρυθμό καθώς αυξάνεται η μεταβλητή y. Μεταφραζόμενο σε όρους του διαγράμματος 6, το γεγονός αυτό σημαίνει ότι, καθώς αυξάνεται με την πάροδο του χρόνου t το μέγεθος της μεταβλητής y, θα αυξάνεται μεν και το μέγεθος της μεταβλητής z $(= \ln y)$, αλλά η αύξηση της z θα γίνεται όλο και πιο μικρή σε σχέση με την αντίστοιχη αύξηση της y. Άρα, σε σύγκριση με την καμπύλη $y = f(t)$, η καμπύλη του λογαριθμικού της μετασχηματισμού $z = \ln f(t)$ θα γέρνει όλο και πιο πολύ προς τον οριζόντιο άξονα, καθώς θα αυξάνεται η τιμή του t. Με άλλα λόγια, η κλίση της καμπύλης $z = \ln f(t)$ θα τείνει, με την πάροδο του χρόνου, να γίνεται όλο και πιο μικρή, σε σύγκριση με την κλίση της καμπύλης $y = f(t)$. Τούτο επιβεβαιώνεται και από την σύγκριση των αριθμητικών τιμών που έχουν καταχωρηθεί στους κάθετους άξονες των δύο διαγραμμάτων του σχήματος 6.



Σχήμα 6.

Ενώ, τόσο στην πρώτη όσο και στην δεύτερη περίοδο, η «μέση τάση» μεταβολής της y παραμένει σταθερή (30:1), η «μέση τάση» μεταβολής της z γίνεται, από περίοδο σε περίοδο, όλο και πιο μικρή. Στην πρώτη περίοδο είναι 0,7:1, ενώ στην δεύτερη περίοδο γίνεται 0,4:1.

Αν ήταν λοιπόν να συνοψίσουμε όλες αυτές τις παρατηρήσεις σε ό,τι αφορά την σχέση μεταξύ μιας χρονικής συνάρτησης $y = f(t)$ και της συνάρτησης του λογαριθμικού της μετασχηματισμού $z = \ln f(t)$, θα λέγαμε το εξής: σε σύγκριση με την καμπύλη της $y = f(t)$, η καμπύλη της $z = \ln f(t)$ συμπιέζεται, με την πάροδο του χρόνου t, όλο και πιο πολύ προς τα κάτω και, ταυτόχρονα, στρέφεται όλο και πιο πολύ προς τον οριζόντιο άξονα.

2.3. *Ο υπολογισμός του ρυθμού μεγέθυνσης μιας μεταβλητής βάσει του λογαριθμικού μετασχηματισμού της*

Κοιτάζοντας με αυστηρότητα τα συμπεράσματα της μέχρι τώρα επιχειρηματολογίας μας, θα πρέπει να ομολογήσουμε την ελλιπή θεμελίωσή τους, καθότι η συναγωγή τους στηρίχθηκε, κατά κύριο λόγο, σε αριθμητικά παραδείγματα και σε επί τούτου σχεδιασμένα γραφήματα. Ο τρόπος με τον οποίο μιλήσαμε προηγουμένως για την κλίση της καμπύλης $y = f(t)$ και, ιδιαίτερα, για την κλίση της καμπύλης $z = \ln f(t)$ ίσως να ήταν διαισθητικά πειστικός, όμως, από άποψη αναλυτική, ήταν αναμφισβήτητα προβληματικός. Επειδή η λογαριθμική συνάρτηση $z = \ln f(t)$ είναι εξ ορισμού συνεχής – αφού συνεχής είναι και η συνάρτηση $y = f(t)$ – δεν μπορεί να μιλάει κανείς, όπως κάναμε εμείς πριν, για την «μέση τάση» μεταβολής των μεταβλητών y και z, αλλά μόνον για την «στιγμιαία». Μετά τα όσα έχουν ήδη λεχθεί για την κλίση της καμπύλης $y = f(t)$ και την ταύτισή της με την πρώτη παράγωγο $dy/dt = f'(t)$, είναι εμφανές ότι, εάν θέλουμε να μιλήσουμε σωστά για την κλίση της καμπύλης $z = \ln f(t)$, θα πρέπει να είμαστε σε θέση να υπολογίσουμε την τιμή που παίρνει, σε κάθε χρονική στιγμή t, η πρώτη παράγωγος dz/dt της συνάρτησης $z = \ln f(t)$.

Για να προσδιορίσουμε την παράγωγο dz/dt θα ξεκινήσουμε από τον ορισμό 4, διατηρώντας ωστόσο κατά νου ότι τώρα τα σύμβολα y και z αναφέρονται σε χρονικές μεταβλητές. Επειδή η διαχρονική πορεία των μεταβλητών y και z μας δίνεται από τις χρονικές συναρτήσεις $y = f(t)$ και $z = z(t) = \ln f(t)$, προκύπτει από το δεξιό σκέλος του ορισμού 4 ότι: $e^{z(t)} = f(t)$. Παραγωγίζοντας και τις δύο πλευρές της έκφρασης αυτής ως προς t – πράγμα που καθιστά αναγκαία την εφαρμογή του αλυσωτού κανόνα στην αριστερή της πλευρά – έχουμε

$$\frac{d}{dt}\left(e^{z(t)}\right)\frac{dz}{dt} = f'(t).$$

Επειδή, όμως, όπως έχει ήδη επισημανθεί, η παράγωγος της e^z ως προς z είναι η ίδια η συνάρτηση e^z $(=f(t))$, προκύπτει αμέσως από την τελευταία έκφραση ο ζητούμενος προσδιορισμός της πρώτης παραγώγου της συνάρτησης $z=\ln f(t)$ ως προς t:

$$\frac{dz}{dt}=\frac{d}{dt}\ln f(t)=\frac{f'(t)}{f(t)}. \tag{13}$$

Έχουμε δείξει ωστόσο (βλ. εξίσωση 3) ότι το πηλίκο $f'(t)/f(t)$ ορίζει τις πράξεις που θα πρέπει να εκτελεστούν προκειμένου να υπολογιστεί ο ρυθμός μεγέθυνσης της μεταβλητής y:

$$g_y=\frac{1}{y}\frac{dy}{dt}=\frac{f'(t)}{f(t)}. \tag{3}$$

Η σύγκριση της 3 με την 13 μας οδηγεί στην έκφραση

$$g_y=\frac{d\ln y}{dt}=\frac{d}{dt}\ln f(t), \tag{14}$$

η οποία μας πληροφορεί ότι, εάν θέλουμε να υπολογίσουμε τον στιγμιαίο ρυθμό μεγέθυνσης της y $(=f(t))$ δεν είναι οπωσδήποτε αναγκαίο να κάνουμε τις πράξεις που υπαγορεύει ο κανόνας 3. Αντί αυτού, μπορούμε να λογαριθμήσουμε την χρονική συνάρτηση $y=f(t)$ και να υπολογίσουμε το μέγεθος της πρώτης παραγώγου της χρονικής συνάρτησης $\ln f(t)$.

Οι εκφράσεις 3 και 14 αποτελούν προφανώς **δύο εναλλακτικές μεθόδους** υπολογισμού του ρυθμού μεγέθυνσης μιας χρονικής μεταβλητής y, όπου $y=f(t)$. Σχολιάζοντας προηγουμένως το σχήμα 3, υπογραμμίσαμε πως το βασικό μειονέκτημα της πρώτης μεθόδου έγκειται στο γεγονός ότι δεν μας επιτρέπει να παρακολουθούμε γεωμετρικά, κοιτάζοντας απλώς την καμπύλη της συνάρτησης $y=f(t)$, το πώς συμπεριφέρεται διαχρονικά ο ρυθμός μεγέθυνσης της μεταβλητής y. Από την άλλη μεριά, το βασικό μειονέκτημα της δεύτερης μεθόδου είναι το σχετικά περιορισμένο πεδίο εφαρμογής της. Και αυτό επειδή ο λογαριθμικός μετασχηματισμός πολλών χρονικών συναρτήσεων δεν είναι πάντοτε εφικτός ή, ακόμα και στην περίπτωση που είναι εφικτός, μπορεί να είναι τόσο περίπλοκος, ώστε να αποδεικνύεται πρακτικά άχρηστος. Εάν όμως η συνάρτηση $y=f(t)$ λογαριθμίζεται σχετικά εύκολα και εάν ο λογαριθμικός της μετασχηματισμός $z=\ln f(t)$ είναι μια αρκετά απλή χρονική συνάρτηση, τότε η δεύτερη μέθοδος παρουσιάζει το σοβαρό πλεονέκτημα ότι μας προσφέρει έναν γεωμετρικό δείκτη – που σύμφωνα με την 14 δεν είναι άλλος παρά η γεωμετρική κλίση της καμπύλης $z=\ln f(t)$ – ο οποίος μας επιτρέπει να παρακολουθούμε άμεσα την διαχρονική συμπεριφορά του ρυθμού μεγέθυνσης g_y. Κοιτάζοντας π.χ. την καμπύλη της συνάρτησης $y=f(t)$ στο σχήμα 6.α., μας είναι σαφές ότι είναι αδύνατο να ειπωθεί τίποτε το ασφαλές ως προς την διαχρονική συμπεριφορά του g_y, αφού είναι αδύνατο να εκτιμηθεί γεωμετρικά εάν το πηλίκο $f'(t)/f(t)$ αυξάνεται, μειώνεται ή παραμένει σταθερό καθώς αυξάνεται η τιμή του t. Όμως, παρακολουθώντας στο σχήμα 6.β. τον τρόπο με τον οποίο μεταβάλλεται διαχρονικά η κλίση της καμπύλης $z = \ln f(t)$, συμπεραίνουμε αμέσως ότι ο ρυθμός μεγέθυνσης της μεταβλητής y αυξάνεται συνεχώς στο χρονικό διάστημα μεταξύ της στιγμής $t = 0$ και της στιγμής $t = 1$, αποκτά μια μέγιστη τιμή την στιγμή $t = 1$ και, μετά από την στιγμή αυτή, αρχίζει να μειώνεται διαρκώς.

Για να διαπιστώσουμε και αναλυτικά τα πλεονεκτήματα του κανόνα 14, ας δούμε τα αποτελέσματα της εφαρμογής του σε περιπτώσεις χρονικών συναρτήσεων που μπορούν εύκολα να λογαριθμηθούν. Τέτοιου είδους περιπτώσεις αποτελούν οι εκθετικές συναρτήσεις του τύπου

$$y = Ae^{\varphi(t)}, \tag{15}$$

όπου A μια δοσμένη σταθερά και ο εκθέτης του e μια δοσμένη χρονική συνάρτηση $\varphi(t)$. Ο λογαριθμικός μετασχηματισμός της 15 είναι η συνάρτηση $\ln y = \ln A + \ln e^{\varphi(t)}$, την οποία, επειδή $\ln e^{\varphi(t)} = \varphi(t)$, μπορούμε να την διατυπώσουμε απλούστερα και ως εξής:

$$\ln y = \ln A + \varphi(t). \tag{16}$$

Παραγωγίζοντας την 16 ως προς t και αφού $d(\ln A)/dt = 0$ έχουμε

$$\frac{d\ln y}{dt} = \varphi'(t).$$

Το αποτέλεσμα αυτό μας οδηγεί, σύμφωνα με τον κανόνα 14, στο ακόλουθο αξιοσημείωτο συμπέρασμα: εάν η διαχρονική πορεία μιας μεταβλητής καταγράφεται από μιαν εκθετική συνάρτηση του τύπου $y = Ae^{\varphi(t)}$, τότε ο ρυθμός μεγέθυνσης της y θα ισούται με την πρώτη παράγωγο του εκθέτη $\varphi(t)$:

$$g_y = \frac{d\ln y}{dt} = \varphi'(t).$$

Στο ίδιο συμπέρασμα καταλήγουμε επίσης και εάν επιλέξουμε να εφαρμόσουμε, αντί του κανόνα 14, τον κανόνα 3. Η παραγώγιση της 15 ως προς t μας δίνει

$$\frac{dy}{dt} = Ae^{\varphi(t)} \cdot \varphi'(t)$$

και η διαίρεση της έκφρασης αυτής με y μας οδηγεί και πάλι στην διαπίστωση ότι

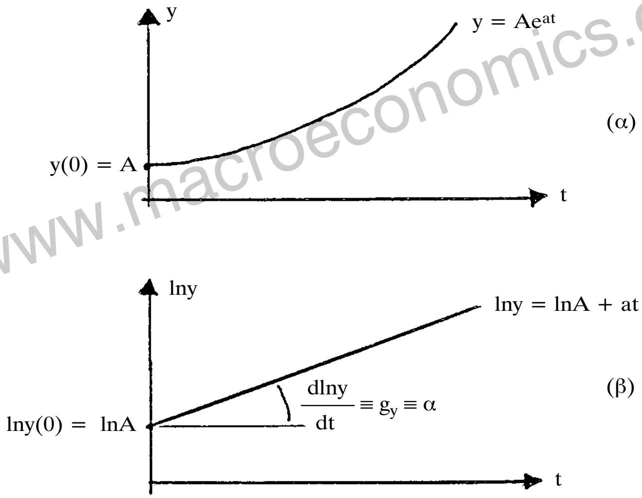
$$g_y = \frac{1}{y}\frac{dy}{dt} = \varphi'(t).$$

Στο πλαίσιο των θεωριών της οικονομικής μεγέθυνσης, ιδιαίτερη σημασία δίνεται στην ειδική περίπτωση της εκθετικής συνάρτησης 15, όπου $\varphi(t) = \alpha t$ και α μια δοσμένη σταθερά:

$$y = Ae^{\alpha t}. \tag{15΄}$$

Η ιδιαιτερότητα αυτής της εκθετικής συνάρτησης έγκειται στο γεγονός ότι περιγράφει την πορεία μιας μεταβλητής που εξελίσσεται διαχρονικά με έναν **σταθερό ρυθμό μεγέ-**

θυνσης. Τούτο προκύπτει από τα όσα είπαμε προηγουμένως σχετικά με την ερμηνεία της πρώτης παραγώγου του εκθέτη της συνάρτησης 15. Επειδή ο εκθέτης της συνάρτησης $y = Ae^{\alpha t}$ είναι η απλή γραμμική συνάρτηση $\varphi(t) = \alpha t$ και επειδή η πρώτη παράγωγος της τελευταίας ισούται με την δοσμένη σταθερά α, είναι προφανές ότι, στην περίπτωση της $y = Ae^{\alpha t}$, η μεταβλητή y θα μεταβάλλεται διαχρονικά με τον σταθερό ρυθμό α, ο οποίος μπορεί να είναι θετικός, αρνητικός ή ακόμα και μηδενικός, ανάλογα με το πρόσημο της δοσμένης σταθεράς α. Εάν υποθέσουμε π.χ. ότι οι παράμετροι α και A είναι θετικοί



Σχήμα 7.

αριθμοί, τότε η καμπύλη της συνάρτησης 15΄ θα έχει την γνωστή εκθετική μορφή που απεικονίζεται στο σχήμα 7.α.. Η τομή της καμπύλης με τον κάθετο άξονα μας δείχνει την «αρχική» τιμή της y, δηλαδή το μέγεθος $y(0)$ που έχει η μεταβλητή y την στιγμή που αρχίζει η καταμέτρηση του χρόνου t (εάν $t = 0$, προκύπτει από την 15΄ ότι $y(0) = Ae^{0t} = A > 0$). Το πρόβλημα με την καμπύλη του σχήματος 7.α. είναι ότι δεν μας επιτρέπει να διαπιστώσουμε, με μια ματιά, ότι στο σχήμα αυτό απεικονίζεται μια μεταβλητή που μεγεθύνεται διαχρονικά με έναν σταθερό ρυθμό ίσο με α. Εάν όμως κάναμε τον κόπο να λογαριθμήσουμε την συνάρτηση 15΄, θα διαπιστώναμε ότι ο λογαριθμικός της μετασχηματισμός είναι η γραμμική συνάρτηση

$$\ln y = \ln A + \alpha t. \tag{16΄}$$

Η καμπύλη της συνάρτησης αυτής είναι μια ευθεία γραμμή (βλ. σχήμα 7.β.), που τέμνει τον κάθετο άξονα στο σημείο $\ln A$ $(= \ln y(0))$ και της οποίας η κλίση ισούται με την δοσμένη σταθερά α: $d\ln y/dt = \alpha$. Επειδή, όμως, η παράγωγος $d\ln y/dt$ μας δείχνει, σύμφωνα με τον κανόνα 14, τον ρυθμό g_y με τον οποίο μεταβάλλεται, από στιγμή σε στιγμή, το μέγεθος της μεταβλητής y, συμπεραίνουμε αμέσως από την ευθεία γραμμή του σχήματος 7.β. – πράγμα που δεν μας το επέτρεπε η καμπύλη του σχήματος 7.α. – ότι η μεταβλητή y θα πρέπει να μεγεθύνεται διαχρονικά με έναν σταθερό ρυθμό, ο οποίος, μάλιστα, θα πρέπει να ισούται με την παράμετρο α στον εκθέτη της συνάρτησης $y = Ae^{\alpha t}$. Αν ήταν να συγκρίνουμε, από γεωμετρική σκοπιά, τα σχήματα 7.α. και 7.β., θα λέγαμε ότι, με τον λογαριθμικό μετασχηματισμό της χρονικής συνάρτησης $y = Ae^{\alpha t}$, η καμπύλη της συμπιέζεται προς τα κάτω και στρέφεται προς τον οριζόντιο άξονα, με αποτέλεσμα να αλλάξει μορφή και να μετατραπεί από **εκθετική** σε **γραμμική**.

3. Ο ρυθμός μεγέθυνσης μεταβλητών που συνδέονται με άλλες μεταβλητές μέσω αριθμητικών πράξεων

3.1. Τύποι συνδέσεων

Επειδή στη θεωρία της οικονομικής μεγέθυνσης ασχολούμαστε, κατά κανόνα, με χρονικές μεταβλητές που συνδέονται με άλλες μεταβλητές μέσω κάποιων δοσμένων μαθηματικών σχέσεων, είναι σημαντικό να μπορούμε να προσδιορίζουμε και την μαθηματική σχέση μέσω της οποίας συνδέονται οι ρυθμοί μεγέθυνσης των μεταβλητών αυτών. Οι πιο απλές μορφές σύνδεσης μεταβλητών είναι οι περιπτώσεις εκείνες όπου μια μεταβλητή ορίζεται ως το γινόμενο, το πηλίκο, η διαφορά ή το άθροισμα άλλων μεταβλητών. Τέτοιου είδους συνδυαστικές μεταβλητές είναι λ.χ.:

- το συνολικό κέρδος Π που ορίζεται ως το γινόμενο του μέσου ποσοστού κέρδους r και της ποσότητας του επενδυμένου κεφαλαίου K ($\Pi = rK$),
- η μέση παραγωγικότητα της εργασίας y που υπολογίζεται ως το πηλίκο του συνολικά παραγόμενου προϊόντος Y και της συνολικής απασχόλησης L ($y = Y/L$),
- το μέγεθος της ανεργίας U που ισούται με την αριθμητική διαφορά του εργατικού δυναμικού N και της απασχόλησης L ($U = N - L$),
- το συνολικό (καθαρό) εισόδημα Y, το οποίο, σε μια κλειστή οικονομία χωρίς δημόσιο τομέα, ισούται με το άθροισμα του συνόλου των μισθών W και του συνόλου των κερδών Π ($Y = W + \Pi$).

Εκτός από αυτόν τον τύπο σύνδεσης μεταβλητών, ο οποίος στηρίζεται στις τέσσερις αριθμητικές πράξεις, στην οικονομική θεωρία χρησιμοποιούνται επίσης και πιο σύνθετα είδη συνδέσεων που παίρνουν συχνά την μορφή γενικών συναρτησιακών σχέσεων του τύπου $z = f(x, y, \ldots)$. Ονομαστές περιπτώσεις τέτοιου είδους συνδέσεων είναι οι **επιχειρησιακές συναρτήσεις παραγωγής** και οι **ατομικές συναρτήσεις χρησιμότητας**, που μας είναι γνωστές από τα εγχειρίδια εισαγωγής στην Μικροοικονομική

Θεωρία, τα οποία αποτελούν, βέβαια, εγχειρίδια εισαγωγής σε μία και μόνον οικονομική θεωρία, την νεοκλασική. Όπως θα θυμόμαστε, οι δυο αυτές συναρτήσεις λειτουργούν ως οι ακρογωνιαίοι λίθοι πάνω στους οποίους χτίζεται, βάσει της νεοκλασικής επιχειρηματολογίας, η θεωρία της προσφοράς και της ζήτησης (προϊόντων και συντελεστών παραγωγής), η θεωρία του ανταγωνισμού και η θεωρία της μερικής και της γενικής ισορροπίας.

Η συνάρτηση παραγωγής μιας επιχείρησης για ένα ορισμένο προϊόν μας παρουσιάζεται συνήθως με την μορφή $Y = F(X_1, \ldots, X_m)$ και μας δείχνει την μέγιστη ποσότητα του προϊόντος Y που είναι δυνατό να παραχθεί, σε μια δοσμένη χρονική στιγμή, μέσω εναλλακτικών ποσοτικών συνδυασμών $X_1, \ldots, X_m$ των συντελεστών παραγωγής 1, ..., m. Στην πιο συμπυκνωμένη παραλλαγή της, η συνάρτηση παραγωγής μιας επιχείρησης παίρνει την μορφή $Y = F(K, L)$, όπου: Y η ποσότητα του παραγόμενου προϊόντος, K το «σύνολο» των χρησιμοποιούμενων μέσων παραγωγής (φυσικό κεφάλαιο), και L το μέγεθος του απασχολούμενου εργατικού δυναμικού. Η μικροοικονομική συνάρτηση παραγωγής $Y = F(K, L)$ διευρύνεται, συχνά, με την εισαγωγή πρόσθετων ανεξάρτητων μεταβλητών, προκειμένου να σηματοδοτηθεί η εξάρτηση της παραγωγής Y και από άλλους παράγοντες, εκτός του αποθέματος κεφαλαίου K και της απασχόλησης L, όπως είναι π.χ. η τεχνική πρόοδος, το έδαφος ή άλλοι φυσικοί πόροι.

Η συνάρτηση ατομικής χρησιμότητας (ή, αλλιώς, συνάρτηση ατομικής ευχαρίστησης, ωφέλειας ή ευημερίας) γράφεται συχνά με την μορφή $U = U(C_1, \ldots, C_n)$, όπου U το επίπεδο της υποκειμενικής ευχαρίστησης που αισθάνεται ένα άτομο, όταν σκέφτεται ότι μπορεί, σε μιαν ορισμένη χρονική στιγμή, να έχει στην κατοχή του διάφορες ποσότητες $C_1, \ldots, C_n$ από μια σειρά n διαφορετικών αγαθών. Μια τροποποιημένη εκδοχή της συνάρτησης αυτής διατυπώνεται με την μορφή $U = U(E, G)$. Εδώ, το γράμμα U συμβολίζει το μέγεθος της ευδαιμονίας που νοιώθει ένα άτομο, καθώς συλλογίζεται ότι μπορεί να κατέχει μια «συνολική» ποσότητα υλικών αγαθών G και ταυτόχρονα να διατηρεί για τον εαυτό του, από τον συνολικά διαθέσιμο χρόνο του Ω, ένα χρονικό διάστημα E στην διάρκεια του οποίου δεν θα είναι υποχρεωμένο να εργάζεται για τρίτους, αλλά θα το χρησιμοποιεί για την προσωπική του ευχαρίστηση και μόνον (ελεύθερος χρόνος, σχόλη, αργία). Μια άλλη εκδοχή της συνάρτησης ατομικής χρησιμότητας είναι η ατομική συνάρτηση διαχρονικών προτιμήσεων ή διαχρονικής ωφέλειας. Στην απλούστερή της μορφή, όταν παραβλέπεται το θέμα της διαχρονικής επιλογής του «ελεύθερου χρόνου», η συνάρτηση διαχρονικών προτιμήσεων γράφεται ως $U = U(C_0, C_1, \ldots C_T)$. Σύμφωνα με την έκφραση αυτή, η συνολική ευχαρίστηση U που ένα άτομο υπολογίζει, στην αρχή της ζωής του (περίοδος 0), ότι θα αποκομίσει από την συνολική διάρκεια του μελλοντικού του βίου είναι συνάρτηση της «συνολικής» ποσότητας καταναλωτικών αγαθών που επιθυμεί να κατέχει στην πρώτη περίοδο της ζωής του (C_0), στην δεύτερη περίοδο (C_1) κ.ο.κ., έως και την τελευταία περίοδο T (C_T), που είναι η περίοδος εκείνη με την οποία έχει υπολογίσει, στην αρχή της ζωής του, ότι θα κλείσει ο βιολογικός του κύκλος και θα αποβιώσει.

Σε τούτο το κεφάλαιο θα εξετάσουμε, σύντομα, τον πρώτο τύπο σύνδεσης μεταβλητών, που είναι και ο πιο απλός. Με τις γενικές, συναρτησιακού τύπου, συνδέσεις που είναι πιο απαιτητικές θα ασχοληθούμε εκτενέστερα στο επόμενο κεφάλαιο. Τότε θα έχουμε την ευκαιρία να επανέλθουμε στις επιχειρησιακές συναρτήσεις παραγωγής και στις ατομικές συναρτήσεις χρησιμότητας, οι οποίες είναι καθοριστικής σημασίας για την θεμελίωση των προτάσεων της νεοκλασικής θεωρίας αλλά αποτελούν, ταυτόχρονα, και αντικείμενο έντονης κριτικής από την πλευρά άλλων θεωρητικών ρευμάτων.

Ο υπολογισμός του ρυθμού μεγέθυνσης μιας χρονικής μεταβλητής z, η οποία ορίζεται ως το γινόμενο, το πηλίκο, η διαφορά ή το άθροισμα δύο άλλων χρονικών μεταβλητών x και y είναι, ουσιαστικά, μια πολύ απλή διαδικασία[6]. Όμως, η διαδικασία αυτή μπορεί να αποδειχθεί περισσότερο ή λιγότερο χρονοβόρα, ανάλογα με το εάν ο υπολογισμός του ρυθμού μεγέθυνσης g_z γίνει βάσει των πράξεων που υπαγορεύονται από τον ορισμό 3 ή τον ορισμό 14. Εάν επιλέξουμε την πρώτη μέθοδο υπολογισμού του ρυθμού g_z, θα πρέπει να παραγωγίσουμε ως προς t το γινόμενο $z = xy$ (ή, αντίστοιχα, το πηλίκο $y = x/z$, την διαφορά $y = x - y$ ή το άθροισμα $y = x + y$) και, κατόπιν, να διαιρέσουμε το αποτέλεσμα της παραγώγισης με z. Στην περίπτωση, ωστόσο, που επιλέξουμε την δεύτερη μέθοδο υπολογισμού του ρυθμού g_z, θα πρέπει αρχικά να λογαριθμίσουμε το γινόμενο $z = xy$ (ή, αντίστοιχα, το πηλίκο, την διαφορά ή το άθροισμα των μεταβλητών x και y) και, στη συνέχεια, να παραγωγίσουμε ως προς t το αποτέλεσμα της λογαρίθμισης αυτής.

3.2. Οι κανόνες του γινομένου και του πηλίκου

Θα ξεκινήσουμε με την περίπτωση μιας χρονικής μεταβλητής, η οποία ορίζεται ως το **γινόμενο** δύο άλλων χρονικών μεταβλητών x και y. Επιλέγοντας να χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό 14 αντί του ορισμού 3, λογαριθμίζουμε το γινόμενο $z = xy$, πράγμα που μας οδηγεί, σύμφωνα με τον κανόνα 10, στο αποτέλεσμα: $\ln z = \ln x + \ln y$.
Από την παραγώγιση της έκφρασης αυτής ως προς t έχουμε την έκφραση

$$\frac{d\ln z}{dt} = \frac{d\ln x}{dt} + \frac{d\ln y}{dt},$$

από την οποία συμπεραίνουμε αμέσως, βάσει του ορισμού 14, ότι ο ρυθμός μεγέθυνσης της μεταβλητής z (δηλαδή του γινομένου xy) ισούται με το **άθροισμα** των ρυθμών μεγέθυνσης των x και y:

---

[6] Για λόγους απλούστευσης της γραφής, παραλείπουμε από τον συμβολισμό των χρονικών μεταβλητών και των ρυθμών μεγέθυνσής τους την αναφορά στην συναρτησιακή εξάρτησή τους από τον χρόνο t. Έτσι, αντί να γράφουμε π.χ. $z(t)$ και $g_z(t)$, γράφουμε απλώς z και g_z.

$$g_z = g_x + g_y. \tag{17}$$

Εάν π.χ. το ποσοστό κέρδους r έχει αυξηθεί κατά 5% και το απόθεμα επενδυμένου κεφαλαίου K κατά 3%, τότε τα συνολικά κέρδη Π $(= rK)$ θα πρέπει να έχουν αυξηθεί κατά 8% $(= 5\% + 3\%)$. Επαναλαμβάνοντας την σειρά των πράξεων που εκτελέσθηκαν προηγουμένως, μπορεί κανείς εύκολα να επαληθεύσει την πρόταση, ότι ο κανόνας 17 ισχύει και στην γενικότερη περίπτωση, όπου η μεταβλητή z ορίζεται ως ένα σταθερό πολλαπλάσιο A του γινομένου πολλών και όχι μόνον δύο άλλων μεταβλητών. Εάν π.χ. $z = Axyw$, όπου A μια δοσμένη σταθερά, τότε $g_z = g_x + g_y + g_w$, αφού $d\ln A/dt = 0$. Για τον λόγο αυτό, ο κανόνας 17 θα ισχύει προφανώς και για την πιο απλή περίπτωση, όπου η μεταβλητή z είναι ένα σταθερό πολλαπλάσιο A μιας και μόνον μεταβλητής (εάν π.χ. $z = Ax$, τότε $g_z = g_x$).

Όταν μια χρονική μεταβλητή z ορίζεται ως το **πηλίκο** δύο άλλων χρονικών μεταβλητών x και y $(z = x/y)$, τότε θα ισχύει, σύμφωνα με τον κανόνα 11, ότι $\ln y = \ln x - \ln y$. Παραγωγίζοντας την έκφραση αυτή ως προς t έχουμε

$$\frac{d\ln z}{dt} = \frac{d\ln x}{dt} - \frac{d\ln y}{dt},$$

πράγμα που μας οδηγεί στο συμπέρασμα – πάλι μέσω του ορισμού 14 – ότι ο ρυθμός μεγέθυνσης της μεταβλητής z (δηλαδή του πηλίκου x/y) ισούται με την **διαφορά** των ρυθμών μεγέθυνσης της x και της y:

$$g_z = g_x - g_y. \tag{18}$$

Εάν π.χ. γνωρίζουμε πως το ΑΕΠ (=Y) μιας χώρας αυξάνεται κατά 3,5% και η συνολική απασχόληση L κατά 1,7%, τότε η παραγωγικότητα της εργασίας y $(= Y/L)$ θα πρέπει να αυξάνεται κατά ένα ποσοστό ίσο με 1,8% $(3,5\% - 1,7\% = 1,8\%)$.

Για να φανεί πόσο σωστή, από άποψη συντόμευσης των μαθηματικών πράξεων, ήταν η αρχική μας επιλογή να χρησιμοποιήσουμε για την εξαγωγή των κανόνων 17 και 18 τον λογαριθμικό ορισμό 14 και όχι τον ορισμό 3, ας προσπαθήσουμε τώρα να θεμελιώσουμε τον κανόνα 18, χρησιμοποιώντας τον ορισμό 3. Η πρώτη πράξη που θα πρέπει να γίνει είναι να παραγωγισθεί ως προς t το πηλίκο $z = x/y$. Εφαρμόζοντας τον κανόνα παραγώγισης του πηλίκου έχουμε την σχετικά περίπλοκη έκφραση

$$\frac{dz}{dt} = \frac{y\frac{dx}{dt} - x\frac{dy}{dt}}{y^2},$$

την οποία μπορούμε να απλουστεύσουμε, εν μέρει, διαιρώντας, στην δεξιά της πλευρά, τον αριθμητή με τον παρονομαστή:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{y}\frac{dx}{dt} - \frac{x}{y}\left(\frac{1}{y}\frac{dy}{dt}\right).$$

Η δεύτερη πράξη που θα πρέπει να εκτελέσουμε, προκειμένου να έχουμε στην αριστερή πλευρά της έκφρασης αυτής τον ζητούμενο ρυθμό μεγέθυνσης g_z $(=(dz/dt)/z)$, είναι να διαιρέσουμε και τις δύο πλευρές της με z:

$$\frac{1}{z}\frac{dz}{dt}=\frac{1}{yz}\frac{dx}{dt}-\frac{x}{yz}\left(\frac{1}{y}\frac{dy}{dt}\right).$$

Επειδή όμως $z=x/y$ ή, αλλιώς, επειδή $yz=x$, μπορούμε να απλουστεύσουμε και την έκφραση αυτή και να της δώσουμε την μορφή

$$\frac{1}{z}\frac{dz}{dt}=\frac{1}{x}\frac{dx}{dt}-\frac{1}{y}\frac{dy}{dt}$$

καταλήγοντας έτσι, μέσω του ορισμού 3, στον κανόνα 18, τούτη τη φορά, βέβαια, μέσα από μια αρκετά χρονοβόρα διαδικασία.

3.3. Οι κανόνες του αθροίσματος και της διαφοράς

Για να υπολογισθεί ο ρυθμός μεγέθυνσης μιας χρονικής μεταβλητής, η οποία ισούται με το άθροισμα ή την διαφορά δύο άλλων χρονικών μεταβλητών, θα πρέπει αναγκαστικά να χρησιμοποιηθεί ο κλασικός ορισμός 3, καθότι η χρήση της λογαριθμικής του εκδοχής 14 δεν οδηγεί, στις περιπτώσεις αυτές, σε αξιοποιήσιμα αποτελέσματα. Εάν, λοιπόν, η μεταβλητή z ισούται με το **άθροισμα** των μεταβλητών x και y, τότε η παραγώγιση της z $(=x+y)$ ως προς t συνεπάγεται ότι

$$\frac{dz}{dt}=\frac{dx}{dt}+\frac{dy}{dt}.$$

Διαιρώντας και τις δύο πλευρές με z έχουμε

$$\frac{1}{z}\frac{dz}{dt}=\frac{1}{z}\frac{dx}{dt}+\frac{1}{z}\frac{dy}{dt}.$$

Πολλαπλασιάζοντας και διαιρώντας ταυτόχρονα τον πρώτο όρο της δεξιάς πλευράς με x και τον δεύτερο όρο με y, έχουμε τελικά την έκφραση

$$\frac{1}{z}\frac{dz}{dt}=\frac{x}{z}\left(\frac{1}{x}\frac{dx}{dt}\right)+\frac{y}{z}\left(\frac{1}{y}\frac{dy}{dt}\right),$$

από την οποία, εάν λάβουμε υπόψη τον γενικό ορισμό 3, προκύπτει το συμπέρασμα ότι ο ρυθμός μεγέθυνσης του αθροίσματος z δύο μεταβλητών x και y $(z=x+y)$ ισούται με το **σταθμισμένο άθροισμα** των ρυθμών μεγέθυνσης των μεταβλητών x και y, όπου τα σχετικά σταθμά είναι τα αντίστοιχα μερίδια συμμετοχής των x και y στο άθροισμα z:

$$g_z=\frac{x}{z}g_x+\frac{y}{z}g_y. \qquad (19)$$

Είναι προφανές ότι το άθροισμα των μεριδίων x/z και y/z θα πρέπει να ισούται με την μονάδα $(x/z+y/z=1)$, γεγονός που μπορούμε να επιβεβαιώσουμε και τυπικά, διαιρώντας την έκφραση $z=x+y$ με z. Για να παρουσιάσουμε και μιαν εφαρμογή του κανόνα 19, ας υποθέσουμε ότι, σε μιαν ορισμένη στιγμή, το μερίδιο των κερδών Π στο συνολικό (καθαρό) εισόδημα Y ισούται με 0,3 $(\Pi/Y = 0{,}3)$. Επειδή το άθροισμα των κερδών Π και των μισθών W ισούται, εξ ορισμού, με Y $(Y = \Pi + W)$, το μερίδιο των μισθών στο εισόδημα θα είναι $0{,}7$ $(W/Y = 1 - \Pi/Y = 1 - 0{,}3 = 0{,}7)$. Εάν, στην δοσμένη χρονική στιγμή, τα κέρδη αυξάνονται κατά 6% $(g_\Pi = 0{,}06)$ και οι μισθοί κατά 2% $(g_W = 0{,}02)$, τότε, την στιγμή αυτή, το συνολικό εισόδημα θα πρέπει να αυξάνεται, σύμφωνα με τον κανόνα 19, με έναν ρυθμό ίσο με 3,2%:

$$g_Y = (0{,}3)(0{,}06) + (0{,}7)(0{,}02) = 0{,}032 = 3{,}2\%.$$

Είναι βέβαια αυτονόητο ότι ο κανόνας 19 είναι γενικεύσιμος και ισχύει για το άθροισμα, όχι μόνον δύο, αλλά πολλών μεταβλητών $(z = x + y + w + \cdots)$.

Στον βαθμό που ακολουθήσουμε την ίδια ακριβώς υπολογιστική διαδικασία, μέσω της οποίας καταλήξαμε προηγουμένως στον κανόνα 19, θα διαπιστώσουμε, χωρίς καμία πρόσθετη δυσκολία, πως για τον ρυθμό μεγέθυνσης μιας χρονικής μεταβλητής z που ορίζεται ως η αριθμητική **διαφορά** δύο άλλων χρονικών μεταβλητών x και y $(z = x - y)$ θα ισχύει ο κανόνας:

$$g_z = \frac{x}{z} g_x - \frac{y}{z} g_y. \qquad (20)$$

Η έκφραση 20 διαφέρει από την έκφραση 19 μόνον ως προς το πρόσημο που συνδέει τους δύο όρους της δεξιάς της πλευράς καθώς και ως προς την σημασία του συμβόλου z, το οποίο, στην 20, δεν συμβολίζει πια το άθροισμα αλλά την διαφορά των μεταβλητών x και y.

Οι κανόνες του γινομένου (17), του πηλίκου (18), του αθροίσματος (19) και της διαφοράς (20) μπορούν βέβαια να χρησιμοποιηθούν και **συνδυαστικά**. Εάν π.χ. μια χρονική μεταβλητή z ορίζεται ως το πηλίκο της χρονικής μεταβλητής x και του γινομένου δύο άλλων χρονικών μεταβλητών y και ω $(z = x/y\omega)$, είναι προφανές, από τον κανόνα 20, ότι ο ρυθμός μεγέθυνσης της z θα ισούται με την διαφορά του ρυθμού μεγέθυνσης της x και του ρυθμού μεγέθυνσης του γινομένου yω, ο οποίος, σύμφωνα με τον κανόνα 17, ισούται με το άθροισμα των ρυθμών μεγέθυνσης της x και της y. Άρα, για τον ρυθμό μεγέθυνσης της z, όπου $z = x/y\omega$, θα πρέπει να ισχύει ότι: $g_z = g_x - (g_y + g_\omega)$.

4. Ο ρυθμός μεγέθυνσης μεταβλητών που συνδέονται με άλλες μεταβλητές μέσω γενικών συναρτησιακών σχέσεων

4.1. Το παράδειγμα των νεοκλασικών συναρτήσεων παραγωγής

Στο προηγούμενο κεφάλαιο ασχοληθήκαμε με τον προσδιορισμό της σχέσης μεταξύ των ρυθμών μεγέθυνσης διαφόρων χρονικών μεταβλητών, επικεντρώνοντας την προσοχή μας σε εκείνες τις ειδικές περιπτώσεις όπου η σύνδεση μεταξύ των μεταβλητών γίνεται μέσω των απλών αριθμητικών πράξεων της προσθαφαίρεσης, του γινομένου και του πηλίκου. Τώρα θα θέλαμε να εξετάσουμε την μορφή που παίρνει η σχέση ανάμεσα στους ρυθμούς μεγέθυνσης διαφόρων μεταβλητών z, x, y, ..., όταν γνωρίζουμε ότι αυτές συνδέονται μεταξύ τους μέσω μιας δοσμένης πλειομεταβλητής συνάρτησης $z = f(x, y, \ldots)$. Θα πρέπει, βέβαια, να είναι σαφές ότι η μαθηματική μορφή που θα πάρει τελικά η σχέση μεταξύ των ρυθμών μεγέθυνσης g_z, g_x, g_y, ..., θα εξαρτηθεί από τις μαθηματικές ιδιότητες που θα υποθέσουμε πως διαθέτει η συνάρτηση $z = f(x, y, \ldots)$.

Όταν θίξαμε για πρώτη φορά το θέμα αυτό, χρησιμοποιήσαμε ως παραδείγματα διάφορες παραλλαγές της συνάρτησης παραγωγής μιας επιχείρησης και της συνάρτησης χρησιμότητας ενός ατόμου. Οι μαθηματικές ιδιότητες των συναρτήσεων αυτών μας είναι λίγο ή πολύ γνωστές από τα τυποποιημένα πλέον εγχειρίδια εισαγωγής στην Μικροοικονομική Θεωρία, τα οποία, όπως έχει ήδη επισημανθεί, αποτελούν, ουσιαστικά, εγχειρίδια εισαγωγής σε μία και μόνο σχολή οικονομικής θεωρίας που είναι η νεοκλασική[7]. Αν ανατρέξουμε στα κεφάλαια των εγχειριδίων αυτών στα οποία παρουσιάζεται η νεοκλασική θεωρία των προτιμήσεων και των επιλογών του καταναλωτή, θα βρούμε και όλες τις πληροφορίες τις σχετικές με τις μαθηματικές ιδιότητες που υποτίθεται ότι διαθέτει μια ατομική συνάρτηση χρησιμότητας[8]. Τις αντίστοιχες πληροφορίες για την συνάρτηση παραγωγής μιας επιχείρησης θα τις βρούμε στα κεφάλαια εκείνα, στα οποία αναπτύσσεται η νεοκλασική θεωρία της τεχνολογίας και της παραγωγής[9].

Επειδή, για λόγους που δεν θα συζητήσουμε την στιγμή αυτή, και οι δύο αυτές συναρτήσεις προικίζονται από την νεοκλασική θεωρία με τις ίδιες σχεδόν μαθηματικές ιδιότητες, θα αναφερθούμε εδώ μόνον στην συνάρτηση παραγωγής μιας επιχείρησης. Τα όσα έχουμε να πούμε για τις ιδιότητες της συνάρτησης αυτής που την ονομάζουμε συχνά και **μικροοικονομική συνάρτηση παραγωγής**, θα τα διατυπώσουμε με αποκλειστική αναφορά στην συμπυκνωμένη της εκδοχή $Y = F(K, L)$. Στην περίπτωση αυτή, η μεταβλητή Y συμβολίζει την ποσότητα του συγκεκριμένου προϊόντος που, σε μια δοσμένη χρονική στιγμή, παράγεται στους εργασιακούς χώρους μιας ορισμένης επιχείρησης, ενώ με τις μεταβλητές K και L συμβολίζονται, αντίστοιχα, οι ποσότητες των συντελεστών παραγωγής «κεφάλαιο» και «εργασία» που χρησιμοποιούνται, στην επιχείρηση αυτή, για την παραγωγή της ποσότητας προϊόντος Y.

Στο σημείο αυτό θα αναβάλουμε για αργότερα κάθε είδους επεξηγήσεις και σχόλια και θα υπενθυμίσουμε απλώς τα ονόματα των **τριών** βασικών μαθηματικών **ιδιοτήτων**, τις οποίες, σύμφωνα με την νεοκλασική λογική, θα πρέπει να διαθέτει κάθε μικρο-

[7] Η νεοκλασική θεωρία που εμφανίζεται προς τον τέλος του 19ου αιώνα, μετά την κρίση της Κλασικής Πολιτικής Οικονομίας (A. Smith, D. Ricardo, J.S. Mill), θεμελιώνεται με την δημοσίευση, στις αρχές της δεκαετίας του 1870, των έργων του W. Jevons στην Αγγλία, του L. Walras στην Γαλλία και του C. Menger στην Αυστρία.

[8] Βλ. π.χ. **W. Nicholson**, Μικροοικονομική Θεωρία, Αθήνα 1998, Κεφ. 3 και 4 ή, εναλλακτικά, **H.R. Varian**, Μικροοικονομική – Μια Σύγχρονη Προσέγγιση, Αθήνα 1992, Κεφ. 3, 4 και 5.

[9] Βλ. **W. Nicholson**, ό.π., Κεφ. 12, καθώς επίσης και **H.R. Varian**, ό.π., Κεφ. 17 και 28.

οικονομική συνάρτηση παραγωγής $Y = F(K, L)$, κατονομάζοντας προκαταβολικά και την συγκεκριμένη **θεωρητική σκοπιμότητα** που εξυπηρετεί κάθε μια από τις ιδιότητες αυτές. Για να διασφαλισθεί η νεοκλασική δοξασία περί «στιγμιαίας και ομαλής προσαρμοστικότητας» της παραγωγικής διαδικασίας στις μεταβολές των «απαιτήσεων» της αγοράς, η συνάρτηση $Y = F(K, L)$ θα πρέπει να είναι **διπλά παραγωγίσιμη** ως προς τις ανεξάρτητες μεταβλητές της K και L. Πέραν τούτου και εξαιτίας κάποιων «φυσικών νόμων» της παραγωγής, οι οποίοι, σύμφωνα με την νεοκλασική θεωρία, καθορίζουν την παραγωγικότητα και την υποκαταστασιμότητα όλων των συντελεστών παραγωγής, η συνάρτηση $Y = F(K, L)$ θα πρέπει, επίσης, να είναι και **κυρτή** σε όλο το πεδίο ορισμού της. Τελικά, για να είναι συμβατή και με τις νεοκλασικές παραστάσεις περί «ελεύθερης πρόσβασης στην αγορά» και περί «τέλειου ανταγωνισμού» η συνάρτηση $Y = F(K, L)$ θα πρέπει να είναι, όχι μόνο διπλά παραγωγίσιμη και κυρτή, αλλά και **γραμμικά ομογενής** ως προς K και ως προς L.

4.2. Η μακροοικονομική (αθροιστική) συνάρτηση παραγωγής $\mathbf{Y = F(K, L)}$ *- Προκαταρκτικές παρατηρήσεις από την πρόσφατη ιστορία οικονομικών θεωριών*

Αυτό που εντυπωσιάζει με την νεοκλασική αντίληψη για τις μαθηματικές ιδιότητες της συνάρτησης παραγωγής μιας επιχείρησης (μικροοικονομική συνάρτηση παραγωγής) δεν είναι μόνο το γεγονός ότι παρουσιάζεται ως αυταπόδεικτη σχεδόν αλήθεια στα εγχειρίδια εισαγωγής στην Μικροοικονομική. Εξίσου εντυπωσιακό είναι επίσης το γεγονός ότι η αντίληψη αυτή υιοθετείται, χωρίς οποιεσδήποτε επιφυλάξεις ή ενδοιασμούς, και από τα νεοκλασικά εγχειρίδια στην Μακροοικονομική[10]. Το μόνο που αλλάζει είναι το όνομα της συνάρτησης $Y = F(K, L)$, η οποία αναβαπτίζεται και αποκαλείται τώρα **μακροοικονομική συνάρτηση παραγωγής**. Η μετονομασία αυτή συνοδεύεται βέβαια και από έναν αντίστοιχο αναπροσδιορισμό της σημασίας των μεταβλητών Y, K και L. Στην μακροοικονομική εκδοχή της $Y = F(K, L)$, η μεταβλητή Y συμβολίζει το **συνολικό προϊόν** της οικονομίας, που είναι, κατά κάποιο τρόπο, το «άθροισμα» όλων των **ετερογενών προϊόντων** καταναλωτικής και επενδυτικής υφής που παράγονται, σε μια ορισμένη χρονική στιγμή, στις διάφορες επιχειρήσεις (π.χ. αυτοκίνητα, πουκάμισα και ψωμιά αλλά, ταυτόχρονα, και αργαλειοί, τόρνοι και γερανοί). Σε αντιστοιχία με την μεταβλητή Y, η μεταβλητή K συμβολίζει τώρα το **συνολικό απόθεμα φυσικού κεφαλαίου** της οικονομίας, δηλαδή το «άθροισμα» κάθε είδους **ετερογενών μέσων παραγωγής** (π.χ. αργαλειοί, τόρνοι, γερανοί), που χρησιμοποιούνται στις διάφορες επιχειρήσεις για την κατασκευή των συγκεκριμένων προϊόντων, στην παραγωγή των οποίων έχει η κάθε μια τους εξειδικευθεί. Τελικά, η μεταβλητή L συμβολίζει τώρα την **συνολική απασχόληση** εργατικού δυναμικού, δηλαδή το σύνολο όλων όσων εργάζονται στις

[10] Βλ. π.χ. **N.G. Mankiw**, Μακροοικονομική Θεωρία, Αθήνα 1999, Κεφ. 3.

διάφορες επιχειρήσεις και οι οποίοι αποτελούν και αυτοί ένα **ανομοιογενές** σύνολο με την έννοια ότι περιλαμβάνει εργαζόμενους διαφορετικών δεξιοτήτων, εξειδικεύσεων και εκπαιδευτικών βαθμίδων.

Η ιδέα ότι είναι δυνατό να ορισθεί μονοσήμαντα, για το **σύνολο των επιχειρήσεων** μιας καπιταλιστικής οικονομίας, μια **μακροοικονομική (αθροιστική) συνάρτηση παραγωγής** $Y = F(K, L)$, η οποία θα πρέπει μάλιστα να διαθέτει τις αρκετά απαιτητικές μαθηματικές ιδιότητες της **διπλής παραγωγισιμότητας**, της **κυρτότητας** και της **γραμμικής ομογένειας**, η ιδέα αυτή αποτελεί την **πρώτη θεμελιώδη υπόθεση**, πάνω στην οποία οικοδομείται όλο σχεδόν το πλέγμα των επιχειρημάτων της **νεοκλασικής μακροοικονομικής θεωρίας**. Τούτο ισχύει, τόσο για την «βραχυχρόνια» θεωρία της **παραγωγής**, της **εξισορρόπησης** των αγορών και της **διανομής** του εισοδήματος μεταξύ μισθών και κερδών, όσο και για την θεωρία της «μακροχρόνιας» ισορροπίας, που περιλαμβάνει την θεωρία της **κατανομής** του συνολικού προϊόντος σε προϊόντα επενδυτικής και σε προϊόντα καταναλωτικής υφής, την θεωρία της **συσσώρευσης κεφαλαίου** («ανθρώπινου» και «φυσικού») καθώς και την γενίκευση της τελευταίας σε θεωρία της **οικονομικής μεγέθυνσης**. Θα πρέπει ωστόσο να σημειωθεί ότι όλο αυτό το μακροοικονομικό οικοδόμημα της νεοκλασικής θεωρίας ολοκληρώνεται και αποκτά εσωτερική συνοχή μόνον εάν υιοθετηθεί και μια **δεύτερη θεμελιώδης υπόθεση**, σύμφωνα με την οποία είναι δυνατό να ορισθεί μονοσήμαντα, για το **σύνολο των ατόμων** της κοινωνίας, μια **αθροιστική συνάρτηση διαχρονικών προτιμήσεων**, η οποία θα πρέπει να διαθέτει μαθηματικές ιδιότητες ανάλογες και εξίσου απαιτητικές με αυτές της αθροιστικής συνάρτησης παραγωγής.

Στην σχετική με μεθοδολογικά ζητήματα βιβλιογραφία έχουν επανειλημμένως εκφρασθεί έντονες αμφιβολίες ως προς την καταλληλότητα των δύο υποθέσεων που αναφέρθηκαν προηγουμένως να χρησιμεύσουν ως βάση για την οικοδόμηση μιας μακροοικονομικής θεωρίας της παραγωγής, της διανομής, της κατανομής και της οικονομικής μεγέθυνσης. Τους επιρρίπτεται η μομφή ότι είναι ανεπαρκώς θεμελιωμένες ή ακόμα και αυθαίρετες και ότι παρασύρουν, αυτούς που τις υιοθετούν, σε εσφαλμένης αφαιρετικότητας εννοιολογικές κατασκευές, σε ανώφελα ρητορικά σχήματα (παραβολές) και σε ιδεολογικά φορτισμένα υποδείγματα τύπου Ροβινσώνα Κρούσου, που κάθε άλλο παρά τους διευκολύνουν να αναγνωρίσουν τα ουσιώδη χαρακτηριστικά μιας καπιταλιστικού είδους κοινωνίας και να εξηγήσουν τον ιδιάζοντα τρόπο, με τον οποίο συγκροτείται και αναπαράγεται διαχρονικά η οικονομία μιας τέτοιου είδους κοινωνίας. Όπως και να έχουν τα πράγματα, γεγονός είναι ότι και οι δύο θεμελιώδεις υποθέσεις της νεοκλασικής μακροοικονομικής θεωρίας έχουν υποστεί, κατά καιρούς, οξύτατη κριτική από άλλες σχολές οικονομικής θεωρίας, οι οποίες διατυπώνουν, για τα ίδια ερωτήματα που βασανίζουν και την νεοκλασική θεωρία, διαφορετικές εννοιολογικές προσεγγίσεις και διαφορετικά εξηγητικά σχήματα. Αν και εδώ δεν είναι ο κατάλληλος χώρος για να παρουσιασθεί η κριτική αυτή, θα ήταν χρήσιμο να αναφερθούμε από τώρα, έστω και επιγραμματικά, σε τέσσερις σημαντικές πτυχές της, που αφορούν στη νεοκλασική εκδοχή της μακροοικονομικής συνάρτησης παραγωγής $Y = F(K, L)$.

Το πρώτο που θα πρέπει να σημειωθεί είναι ότι στην θεωρητική και στην εμπειρική βιβλιογραφία έχει υποστηριχθεί με πειστικότητα – και μάλιστα και από νεοκλασικούς οικονομολόγους (π.χ. M. Brown και F. Fisher) – η θέση ότι είναι αδύνατο, από άποψη αναλυτική, να συναθροισθούν οι μικροοικονομικές συναρτήσεις παραγωγής των διαφόρων επιχειρήσεων και να προκύψει, από την συνάθροιση αυτή, μια μακροοικονομική συνάρτηση παραγωγής που να έχει τις ίδιες μαθηματικές ιδιότητες που υποτίθεται ότι έχουν οι μικροοικονομικές συναρτήσεις παραγωγής. Το συμπέρασμα αυτό, το οποίο ισχύει επίσης και για την αθροιστική συνάρτηση ατομικών προτιμήσεων, είναι γενικότερης σημασίας. Δείχνει πόσο **προβληματικό** είναι, για την ίδια την νεοκλασική θεωρία, το βασικό της μεθοδολογικό πρόσταγμα, το οποίο απαιτεί την **μικροοικονομική θεμελίωση** όλων των μακροοικονομικών κατηγοριών (μεθοδολογικός ατομισμός).

Μια δεύτερη πτυχή της κριτικής που έχει υποστεί η μακροοικονομική συνάρτηση παραγωγής $Y = F(K, L)$ αναφέρεται στον βαρύνοντα ρόλο που επωμίζονται οι μαθηματικές ιδιότητες της συνάρτησης αυτής για την ισχύ των πορισμάτων, στα οποία καταλήγει η νεοκλασική μακροοικονομική θεωρία της παραγωγής, της διανομής και της οικονομικής μεγέθυνσης. Χαρακτηριστικό γνώρισμα της θεωρίας αυτής είναι ότι, χρησιμοποιώντας μια διευρυμένη παραλλαγή της συνάρτησης $Y = F(K, L)$ ώστε να συμπεριληφθεί και η επίδραση της τεχνικής προόδου, φτάνει τελικά στα ακόλουθα πολύ αισιόδοξα συμπεράσματα σε ό,τι αφορά την εξελικτική προοπτική μιας καπιταλιστικής οικονομίας. Υπό καθεστώς τέλειου ανταγωνισμού και καθοδηγούμενη αποκλειστικά και μόνο από τις προτιμήσεις των καταναλωτών (δηλαδή χωρίς την οποιαδήποτε παρέμβαση του κράτους), η συσσώρευση κεφαλαίου αποδεικνύεται να είναι μια ομαλή και ευσταθής διαδικασία, η οποία οδηγεί την οικονομία σε μια τροχιά σταθερής μεγέθυνσης, εξασφαλίζοντας ταυτόχρονα τόσο την πλήρη απασχόληση του εργατικού δυναμικού όσο και την διαχρονική ευδαιμονία όλων των γενεών του πληθυσμού, συμπεριλαμβανομένων και εκείνων που θα γεννηθούν και θα ζήσουν στο άμεσο και στο απότερο μέλλον (αιωνιότητα). Η θεωρία αυτή μπορεί, για διάφορους ουσιαστικούς λόγους, να μην είναι γενικά αποδεκτή, δεν μπορεί ωστόσο να αμφισβητηθεί με το επιχείρημα ότι η κατασκευή της είναι λογικά αντιφατική. Το ερώτημα που παραμένει όμως αναπάντητο είναι εάν τα συμπεράσματά της έχουν **γενική ισχύ**. Μέσα από έντονες διαμάχες μεταξύ νεοκλασικών οικονομολόγων (π.χ. P. Samuelson και R. Solow) και οικονομολόγων της **νεορικαρδιανής** σχολής (π.χ. P. Sraffa και L. Pasinetti) έχει καταδειχθεί ότι η εσωτερική λογική της νεοκλασικής θεωρίας της παραγωγής, της διανομής και της οικονομικής μεγέθυνσης γίνεται αντιφατική και τα συμπεράσματά της παύουν να έχουν γενική ισχύ την στιγμή που η θεωρία αυτή αναγκασθεί να αντιμετωπίσει το **πρόβλημα της ετερογένειας** του συνολικού προϊόντος Y ή της ετερογένειας του συνολικού αποθέματος μέσων παραγωγής K ή, για να είμαστε ακόμα πιο ρεαλιστικοί, της ετερογένειας και των δύο. Το πρόβλημα αυτό αναφέρεται στις θεωρητικές δυσκολίες που αντιμετωπίζει κανείς όταν, θέλοντας να «αθροίσει» διάφορες ποσότητες ετερογενών οικονομικών μεταβλητών, προσπαθεί να ανακαλύψει ένα **«μέτρο»**, το οποίο δεν θα επηρεάζεται από την οικονομική συγκυρία αλλά θα παραμένει **αμετάβλητο** (σταθερό) με την έννοια ότι το μέγεθός του δεν θα μεταβάλλεται κάθε φορά που μεταβάλλονται οι ποσότητες των μεταβλητών που το «μέτρο» αυτό θέλει να μετρήσει. Στον βαθμό που είναι δυνατό να βρεθεί ένα τέτοιο αμετάβλητο «μέτρο» (τιμές;), τότε μπορεί κανείς να το χρησιμοποιήσει για να «αθροίσει» τις ποσότητες διαφόρων ετερογενών μέσων παραγωγής (π.χ. 30 αλέτρια και 20 τόρνους) καθώς και τις ποσότητες διαφόρων ετερογενών προϊόντων (π.χ. 2 κιλά ψωμί, 4 πορτοκάλια και 2 τόρνους), κατορθώνοντας έτσι να υπολογίσει μονοσήμαντα, σε σχέση με την μακροοικονομική συνάρτηση παραγωγής $Y = F(K, L)$, τόσο το μέγεθος (την «αξία») του συνολικού αποθέματος μέσων παραγωγής K όσο και το μέγεθος (την «αξία») του συνολικού προϊόντος Y. Ας σημειωθεί, ότι στις περιπτώσεις αυτές θα πρέπει να εγκαταλειφθεί το μονοτομεακό πλαίσιο ανάλυσης που συνδέεται με την μακροοικονομική συνάρτηση παραγωγής $Y = F(K, L)$ και να αντικατασταθεί από ένα πολυτομεακό πλαίσιο ανάλυσης, το οποίο θα στηρίζεται σε πίνακες εισροών-εκροών και θα απαιτεί την κατασκευή δυναμικών υποδειγμάτων τύπου Leontief και von Neumann.

Ο καθοριστικός ρόλος που διαδραματίζει η αθροιστική συνάρτηση παραγωγής $Y = F(K, L)$ για την ισχύ της νεοκλασικής μακροοικονομικής θεωρίας έχει αποτελέσει αντικείμενο κριτικής και από την πλευρά μιας σειράς οικονομολόγων που εντάσσονται, κάπως χαλαρά, στην αποκαλούμενη **μετακεϋνσιανή** σχολή (π.χ. R. Harrod, J. Robinson, N. Kaldor και, εν μέρει, R. Goodwin και M. Kalecki)[11]. Παρά τις όποιες διαφορές τους, που σε ορισμένα τους σημεία είναι αρκετά σημαντικές, οι οικονομολόγοι της σχολής αυτής αντιμετωπίζουν το θέμα της παραγωγής, της διανομής και της οικονομικής μεγέθυνσης μέσα από το πρίσμα της μακροοικονομικής θεωρίας που αναπτύχθηκε, στην διάρκεια της Μεγάλης Κρίσης της δεκαετίας του 1930, από τον J.M. Keynes και μάλιστα σε ρητή αντιπαράθεση με τους νεοκλασικούς θεωρητικούς της εποχής του (κυρίως με τον A.C. Pigou και, έμμεσα, και με τον A. Marshall, του οποίου διάδοχος στο Πανεπιστήμιο Cambridge υπήρξε ο Pigou). Απορρίπτοντας την ταύτιση του ποσοστού

[11] Η μετακεϋνσιανή σχολή δεν θα πρέπει να συγχέεται με την σχολή που αυτοαποκαλείται **νέα κεϋνσιανή** (βλ. π.χ. N.G. Mankiw, ό.π.). Στην μακροχρόνια εκδοχή της, η νέα-κεϋνσιανή θεωρία ταυτίζεται με την νεοκλασική, ενώ η βραχυχρόνια εκδοχή της είναι περίπου όμοια με την απόπειρα συμβιβασμού του κεϋνσιανισμού με τον νεοκλασικισμό που είναι γνωστή ως **«θεωρία IS-LM»** και την οποία ο P. Samuelson την αποκάλεσε **«νεοκλασική σύνθεση»** ενώ η J. Robinson την χαρακτήρισε ως **«μπάσταρδο κεϋνσιανισμό»**. Και μια ακόμα αναγκαία παρατήρηση. Στα εγχειρίδια εισαγωγής στην νεοκλασική Μακροοικονομική Θεωρία δίνεται μεγάλη έμφαση στην αντιδιαστολή μεταξύ του **«κλασικού υποδείγματος»** και του **«κεϋνσιανού»**. Για να μην δημιουργούνται παρεξηγήσεις, θα πρέπει να σημειωθεί ότι το «κλασικό υπόδειγμα» δεν έχει τίποτε το κοινό με την παράδοση της Κλασικής Πολιτικής Οικονομίας (εκτός, ίσως, της κοινής αποδοχής του νόμου του Say). Στην πραγματικότητα, το «κλασικό υπόδειγμα» είναι απλώς μια μετονομασία του νεοκλασικού μακροοικονομικού υποδείγματος. Από την άλλη μεριά, το «κεϋνσιανό υπόδειγμα» των εγχειριδίων είναι και αυτό ψευδεπίγραφο αφού χρησιμοποιείται ως εναλλακτική ονομασία του υποδείγματος της «νεοκλασικής σύνθεσης», για την οποία έγινε λόγος προηγουμένως.

κέρδους με την οριακή παραγωγικότητα του φυσικού κεφαλαίου – μια ταύτιση που προϋποθέτει την αποδοχή της νεοκλασικής αθροιστικής συνάρτησης παραγωγής $Y = F(K, L)$ – και στηριζόμενες σε μια **χρηματική θεωρία της παραγωγής** με επίκεντρο την (μεγάλη) καπιταλιστική επιχείρηση μετοχικού κεφαλαίου, οι μετακεϋνσιανές θεωρίες αναδιατυπώνουν, σε δυναμικό πλαίσιο, την κεϋνσιανή προβληματική γύρω από την αυτοτροφοδοτούμενη ανισορροπία μεταξύ συνολικής προσφοράς και συνολικής (αποτελεσματικής) ζήτησης. Από τα συμπεράσματα των θεωριών αυτών αναδύεται μια εικόνα της διαχρονικής εξέλιξης των καπιταλιστικών οικονομιών που βρίσκεται στον αντίποδα των αρμονιστικών οραμάτων της νεοκλασικής θεωρίας. Η συσσώρευση κεφαλαίου και η οικονομική μεγέθυνση εμφανίζονται τώρα ως ενδογενώς ασταθείς διαδικασίες, οι οποίες σταθεροποιούνται, έως έναν βαθμό, είτε μέσω εξωγενών παρεμβάσεων της κρατικής πολιτικής είτε μέσω ενδογενών μεταβολών της απασχόλησης εργατικού δυναμικού και της διανομής του εισοδήματος μεταξύ μισθών και κερδών. Κεντρική μεταβλητή των μετακεϋνσιανών θεωριών αποτελεί η επενδυτική πολιτική των επιχειρήσεων, η οποία, επιδρά μεν θετικά στο επίπεδο των κερδών και του ποσοστού κέρδους, αλλά περιορίζεται από την εξέλιξη της συνολικής ζήτησης και από τις δυνατότητες που έχουν οι επιχειρήσεις να χρηματοδοτούν τα επενδυτικά τους σχέδια με αυξήσεις των τιμών, με κατακράτηση κερδών ή με προσφυγή σε ξένες πηγές κεφαλαίου (αύξηση μετοχικού κεφαλαίου ή νέος δανεισμός).

Αντικείμενο μιας τέταρτης κριτικής που προέρχεται από την **μαρξιστική** σχολή αλλά και την αποκαλούμενη **ριζοσπαστική** (π.χ. S. Bowles και R. Edwards) είναι η «φυσική» θεωρία της παραγωγής μέσω της οποίας θεμελιώνονται οι νεοκλασικές συναρτήσεις παραγωγής. Όπως φαίνεται και από τον συναρτησιακό συμβολισμό $Y = F(K, L)$, ιδιάζον γνώρισμα των συναρτήσεων αυτών είναι ότι δεν αναγνωρίζουν στον συντελεστή παραγωγής «εργασία» καμία ιδιαιτερότητα. Τον θεωρούν ότι αποτελεί απλώς ένα «πράγμα», το οποίο το αντιμετωπίζουν, εννοιολογικά και αναλυτικά, με τον ίδιο ακριβώς τρόπο με τον οποίο αντιμετωπίζουν και τα κάθε είδους άλλα πράγματα που ανήκουν στις υλικές προϋποθέσεις της παραγωγής (εργαλεία, μηχανήματα, έδαφος, ενέργεια, πρώτες ύλες κλπ.). Συνέπεια της αντίληψης αυτής είναι να ταυτιστεί η θεωρία της παραγωγής με την περιγραφή των **τεχνικών σχέσεων παραγωγής** (ποσοτικές σχέσεις μεταξύ συντελεστών παραγωγής και προϊόντων) καθώς και με την αναζήτηση κάποιων **φυσικών νόμων** που θα πρέπει να διέπουν τις σχέσεις αυτές, καθορίζοντας τελικά και τις μαθηματικές ιδιότητές τους. Έτσι, όμως, η νεοκλασική θεωρία αδυνατεί, σύμφωνα με τους επικριτές της, να συλλάβει εννοιολογικά και να ενσωματώσει στα αναλυτικά της μικροοικονομικά και μακροοικονομικά υποδείγματα την **ουσιώδη διαφορά** ανάμεσα σε μια διαδικασία παραγωγής (και μάλιστα καπιταλιστικού τύπου) και σε μια φυσική διαδικασία υλικού μετασχηματισμού αντικειμένων ορισμένης υφής σε αντικείμενα διαφορετικής υφής. Αυτό που διαφοροποιεί τον αυθόρμητο και φυσικό μετασχηματισμό κάποιων σπόρων και υλικών της γης σε πεύκα ενός δάσους του Πηλίου από μια διαδικασία παραγωγής επίπλων στον Πειραιά, είναι ότι η τελευταία δεν είναι ούτε αυθόρμητη ούτε φυσική. Η διαδικασία αυτή είναι αδύνατον να γίνει κατανοητή, εάν δεν αναγνωρισθεί ότι τα έπιπλα είναι προϊόντα ανθρώπινης εργασίας και ότι η παραγωγή τους είναι αποτέλεσμα μιας συλλογικής και ιεραρχικά δομημένης **εργασιακής διαδικασίας** και μάλιστα ορισμένης **ιστορικής** μορφής. Δηλαδή μιας εργασιακής διαδικασίας, που εξυπηρετεί κάποιους συγκεκριμένους σκοπούς και η οποία σχεδιάζεται, συγκροτείται και διεκπεραιώνεται στο πλαίσιο ορισμένων **κοινωνικών σχέσεων παραγωγής** όπου η ανθρώπινη εργασία εμφανίζεται με την μορφή της **μισθωτής εργασίας** και όπου οι υλικές προϋποθέσεις παραγωγής (που είναι και αυτές, κατά κανόνα, προϊόντα εργασιακών διαδικασιών) εμφανίζονται με την μορφή του **κεφαλαίου**. Μια και εδώ δεν είναι ο χώρος για να διατυπώσουμε τις αναγκαίες επεξηγήσεις, σημειώνουμε απλώς το ακόλουθο γεγονός. Δίνοντας την εννοιολογική πρωτοκαθεδρία στις κοινωνικές σχέσεις παραγωγής και όχι στις τεχνικές, οι οικονομολόγοι της μαρξιστικής και της ριζοσπαστικής σχολής, καταλήγουν, μέσα από διαφορετικούς δρόμους, στην κατασκευή μακροοικονομικών θεωριών, από τις οποίες προκύπτει μια εικόνα της συγκρότησης, αναπαραγωγής και μεγέθυνσης των καπιταλιστικών οικονομικών που είναι διαμετρικά διαφορετική από την εικόνα που μας προσφέρουν τα θεωρήματα της νεοκλασικής σχολής. Σε αντίθεση με τη νεοκλασική θεωρία, όπου δεσπόζει η αρμονική εικόνα μιας ομαλά και με σταθερούς ρυθμούς μεγεθυνόμενης οικονομίας, στην ριζοσπαστική και ιδιαίτερα στην μαρξιστική θεωρία τονίζεται ο συγκρουσιακός χαρακτήρας της σχέσης κεφαλαίου-εργασίας, η περιοδική εμφάνιση οικονομικών κρίσεων και η κυκλικότητα της συσσώρευσης κεφαλαίου.

Όμως, παρά τις διάφορες κριτικές που έχει υποστεί στις τελευταίες δεκαετίες, η νεοκλασική μακροοικονομική θεωρία έχει κατορθώσει σήμερα (και για λόγους που δεν είναι της στιγμής) να κυριαρχεί στους χώρους της ακαδημαϊκής έρευνας και διδασκαλίας. Η δεσπόζουσα θέση της στην αρένα των σύγχρονων θεωρητικών συζητήσεων και αντιπαραθέσεων έχει βέβαια και μια πρακτική συνέπεια. Όποιος θελήσει να παρακολουθήσει από κοντά τις συζητήσεις αυτές και, ιδιαίτερα, εκείνες που αναφέρονται στα θέματα της συσσώρευσης κεφαλαίου και της οικονομικής μεγέθυνσης, δεν μπορεί να αποφύγει την σοβαρή ενασχόληση και με τα όσα λέγονται για τα θέματα αυτά από την κυρίαρχη σκοπιά της νεοκλασικής θεωρίας. Η πρόσβαση στα κείμενα της σχετικής βιβλιογραφίας δυσκολεύεται ωστόσο κατά πολύ, εάν κανείς δεν έχει προηγουμένως εξοικειωθεί με την μαθηματική γλώσσα, στην οποία οι σύγχρονοι νεοκλασικοί οικονομολόγοι διατυπώνουν τις βασικές τους παραδοχές, καθώς επίσης και με τις μαθηματικές μεθόδους που χρησιμοποιούν προκειμένου να καταλήξουν, ξεκινώντας από τις παραδοχές αυτές, στα θεωρητικά συμπεράσματά τους. Ένα μεγάλο μέρος των δυσκολιών που αντιμετωπίζει κανείς, όταν αρχίζει να μελετά την νεοκλασική θεωρία της συσσώρευσης κεφαλαίου και της οικονομικής μεγέθυνσης, οφείλεται πολύ περισσότερο στην μαθηματική της μορφή και πολύ λιγότερο στο ίδιο το περιεχόμενό της, το οποίο είναι αρκετά απλό και εύκολα κατανοητό, εάν απογυμνωθεί από το μαθηματικό περίβλημά του.

Δεδομένης της κεντρικής θέσης που κατέχουν στο πλαίσιο της νεοκλασικής επιχειρηματολογίας οι δύο θεμελιώδεις υποθέσεις για τις οποίες έγινε λόγος προηγουμένως και προκειμένου να συντομευτεί η πρόσβαση στα κείμενα της νεοκλασικής βιβλιογραφίας, θα ήταν σκόπιμο να χρησιμοποιήσουμε ως σημείο αναφοράς για τους υπολογισμούς των ρυθμών μεγέθυνσης που θα γίνουν σε λίγο, αντί του γενικού συναρτησιακού συμβολισμού $z = f(x, y, \ldots)$, τους ειδικούς οικονομικούς συμβολισμούς, βάσει των οποίων διατυπώνεται η αθροιστική συνάρτηση παραγωγής και η αθροιστική συνάρτηση ατομικών προτιμήσεων. Προς στιγμή, θα αναφερθούμε μόνο στην αθροιστική συνάρτηση παραγωγής $Y = F(K, L)$ και στις παραλλαγές της. Όμως, τα όσα έχουμε να πούμε για την συνάρτηση αυτή θα αποδειχθούν πολύ χρήσιμα, όταν χρειαστεί να συμπεριλάβουμε στους υπολογισμούς μας και την αθροιστική συνάρτηση ατομικών προτιμήσεων. Για να μπορέσουμε, ωστόσο, να εντοπίσουμε την μαθηματική σχέση μεταξύ των ρυθμών μεγέθυνσης των μεταβλητών Y, K και L και να δούμε το πώς μεταφράζεται η σχέση αυτή σε οικονομικούς όρους, θα πρέπει να κάνουμε προηγουμένως δύο πράγματα:

- πρώτον, να διευκρινίσουμε το τι ακριβώς εννοείται, από άποψη **μαθηματική**, όταν λέγεται ότι η μακροοικονομική συνάρτηση παραγωγής $Y = F(K, L)$ διαθέτει τις ιδιότητες της διπλής παραγωγισιμότητας, της κυρτότητας και της γραμμικής ομογένειας και
- δεύτερον, να συνειδητοποιήσουμε τις συνέπειες που έχει, από άποψη **οικονομικής ερμηνείας**, η υιοθέτηση της παραδοχής ότι η μακροοικονομική συνάρτηση παραγωγής $Y = F(K, L)$ είναι διπλά παραγωγίσιμη, κυρτή και γραμμικά ομογενής.

Παρακάμπτοντας όλους τους βάσιμους ενδοιασμούς ως προς την δυνατότητα άθροισης των συναρτήσεων παραγωγής των διαφόρων επιχειρήσεων σε μια μακροοικονομική συνάρτηση παραγωγής νεοκλασικού τύπου, θα ακολουθήσουμε και εμείς, στις επόμενες σελίδες, την άκριτη πρακτική που ακολουθούν όλα σχεδόν τα εγχειρίδια εισαγωγής στην Μακροοικονομική. Έτσι, από εδώ και πέρα, όταν θα αναφερόμαστε στο σύνολο του παραγωγικού τομέα της οικονομίας, θα μιλάμε για την μακροοικονομική συνάρτηση παραγωγής «ως εάν» να επρόκειτο για την συνάρτηση παραγωγής μιας επιχείρησης. Μιας επιχείρησης, την οποία, για να καλύψουμε την μεθοδολογική μας αμηχανία, θα την χαρακτηρίζουμε ευφημιστικά και ως «αντιπροσωπευτική», παρόλο που θα μας είναι ξεκάθαρο από την αρχή ότι η επιχείρηση αυτή δεν αντιπροσωπεύει τίποτε άλλο παρά τον εαυτό της. Αν θέλουμε να είμαστε ειλικρινείς, θα πρέπει να ομολογήσουμε ότι αυτή η σόλοικη **«ως εάν» επιχειρηματολογία** μαζί με την παραπλανητική έννοια της **«αντιπροσωπευτικής επιχείρησης»** μας μεταφέρουν σε ένα επίπεδο αφαίρεσης, το οποίο μας επιβάλλει να σκεφθούμε ότι όλο το σύνθετο πλέγμα των διαφόρων παραγωγικών δραστηριοτήτων της οικονομίας βρίσκεται, ουσιαστικά, υπό την σκεπή μιας και μόνον επιχείρησης. Τούτο έχει βέβαια την δυσάρεστη συνέπεια να διαγραφούν από την θεωρητική ανακατασκευή του ερευνητικού μας αντικειμένου (το οποίο εξακολουθούμε, παρ' όλα αυτά, να το ονομάζουμε «οικονομία της ελεύθερης επιχειρηματικής πρωτοβουλίας» ή «οικονομία της αγοράς» ή «καπιταλιστική οικονομία») όλες του οι διαστάσεις εκείνες που έχουν να κάνουν με τον **κοινωνικό καταμερισμό της εργασίας** και τις διάφορες **μορφές ανταγωνισμού**, σε ενδοκλαδικό και διακλαδικό επίπεδο.

Και μια τελευταία παρατήρηση σχετική με την σημασία των όρων «τεχνολογία» και «τεχνική», τους οποίους θα χρησιμοποιήσουμε συχνά στις επόμενες σελίδες, καθώς θα σχολιάζουμε την οικονομική ερμηνεία των μαθηματικών ιδιοτήτων της συνάρτησης παραγωγής $Y = F(K,L)$. Όταν θα λέμε ότι η συνάρτηση $Y = F(K,L)$ περιγράφει την **τεχνολογία** που, σε μια ορισμένη χρονική στιγμή, βρίσκεται στη διάθεση μιας επιχείρησης (ή του συνόλου της οικονομίας), θα εννοούμε ότι η συνάρτηση αυτή καταγράφει το μέγιστο προϊόν Y που είναι δυνατόν να παραχθεί, σε μια ορισμένη χρονική στιγμή, από οποιονδήποτε γνωστό και τεχνικά εφικτό ποσοτικό συνδυασμό των συντελεστών παραγωγής K και L. Ενώ ο όρος τεχνολογία περιλαμβάνει το σύνολο των γνωστών τρόπων συγκρότησης της παραγωγικής διαδικασίας που μπορούν να χρησιμοποιηθούν, εναλλακτικά, για τον μετασχηματισμό αποθεμάτων φυσικού κεφαλαίου και ωρών εργασίας σε τελικά προϊόντα, ο όρος **τεχνική** αναφέρεται σε έναν ορισμένο τρόπο συγκρότησης της παραγωγικής διαδικασίας, δηλαδή σε έναν ορισμένο ποσοτικό συνδυασμό των συντελεστών παραγωγής K και L και στο μέγιστο προϊόν Y που μπορεί να παραχθεί μέσω αυτού του συνδυασμού. Εάν π.χ. μέσω του συγκεκριμένου συνδυασμού K_α και L_α παράγεται η ποσότητα προϊόντος Y_α ($Y_\alpha = F(K_\alpha, L_\alpha)$) και εάν η ίδια ποσότητα Y_α μπορεί επίσης να παραχθεί και μέσω ενός άλλου συνδυασμού K_β και L_β ($Y_\alpha = F(K_\beta, L_\beta)$), τότε θα λέμε ότι η τεχνική β είναι **υψηλότερης έντασης κεφαλαίου** (ή, διαφορετικά, **χαμηλότερης έντασης εργασίας**), σε σύγκριση με την τεχνική α, στον βαθμό που η αναλογία κεφαλαίου-εργασίας (K/L) είναι υψηλότερη στην τεχνική β απ' ότι στην τεχνική α ($K_\beta/L_\beta > K_\alpha/L_\alpha$). Στην περίπτωση όπου, σε μια ορισμένη χρονική στιγμή, χρησιμοποιείται η τεχνική α και αποφασίζεται να γίνει **αντικατάσταση** της τεχνικής α από την τεχνική β, τότε η **μετάβαση** της οικονομίας από την τεχνική α στην τεχνική β θα συνεπάγεται μια λιγότερο ή περισσότερο ριζική **αναδιάρθρωση** της παραγωγικής διαδικασίας. Μια αναδιάρθρωση, η οποία θα έχει ως αποτέλεσμα την **υποκατάσταση** μιας ορισμένης ποσότητας του συντελεστή L από μιαν ορισμένη ποσότητα του συντελεστή K, αφού για την παραγωγή της ίδιας ποσότητας προϊόντος χρησιμοποιείται τώρα μια τεχνική υψηλότερης έντασης κεφαλαίου (χαμηλότερης έντασης εργασίας).

4.3. Οι δύο πρώτες ιδιότητες της $\mathbf{Y = F(K,L)}$*: διπλή παραγωγισιμότητα και κυρτότητα*

(α) Η πρώτη ιδιότητα: διπλή παραγωγισιμότητα

Πριν αρχίσουμε με την παρουσίαση των τριών βασικών μαθηματικών ιδιοτήτων που, σύμφωνα με την νεοκλασική λογική, θα πρέπει να διαθέτει η μακροοικονομική (αθροιστική) συνάρτηση παραγωγής $Y = F(K, L)$, σημειώνουμε ότι για την συνάρτηση αυτή υιοθετούνται, για ευνόητους λόγους, και οι ακόλουθες τρεις παραδοχές. Πρώτον, ότι οι μεταβλητές K και L είναι συνεχείς και όχι διακριτές. Δεύτερον, ότι το πεδίο ορισμού της $Y = F(K, L)$ περιορίζεται σε μη-αρνητικές τιμές των K και L ($K \geq 0, L \geq 0$), ενώ το πεδίο τιμών της Y δεν περιλαμβάνει αρνητικές τιμές ($Y \geq 0$). Και τρίτον, ότι $F(K, 0) = 0$ και $F(0, L) = 0$, πράγμα που σημαίνει ότι είναι αδύνατον να παραχθεί οποιαδήποτε ποσότητα προϊόντος Y, ακόμα και η πιο μικρή, χωρίς την συμβολή και των δύο συντελεστών παραγωγής K και L.

Η πρώτη βασική παραδοχή ως προς την μαθηματική μορφή της μακροοικονομικής συνάρτησης παραγωγής $Y = F(K, L)$ είναι ότι αυτή θα πρέπει να χαρακτηρίζεται από την **ιδιότητα της διπλής παραγωγισιμότητας**. Ο μαθηματικός ορισμός της ιδιότητας αυτής έχει ως εξής: Εάν μια διμεταβλητή συνάρτηση $Y = F(K, L)$ είναι διπλά παραγωγίσιμη και ως προς τις δύο ανεξάρτητες μεταβλητές της K και L, τότε η συνάρτηση αυτή θα πρέπει να είναι τέτοιας μορφής ώστε, για οποιονδήποτε συνδυασμό των K και L, να ορίζεται μονοσήμαντα, όχι μόνο το αντίστοιχο μέγεθος της μεταβλητής Y, αλλά και το αντίστοιχο μέγεθος της πρώτης και της δεύτερης μερικής παραγώγου της Y ως προς K

$$\frac{\partial Y}{\partial K} \equiv F_K(K, L), \quad \frac{\partial^2 Y}{\partial K^2} \equiv F_{KK}(K, L),$$

καθώς επίσης και το αντίστοιχο μέγεθος της πρώτης και της δεύτερης μερικής παραγώγου της Y ως προς L

$$\frac{\partial Y}{\partial L} \equiv F_L(K, L), \quad \frac{\partial^2 L}{\partial L^2} \equiv F_{LL}(K, L).$$

Από την γενική θεωρία των συναρτησιακών σχέσεων γνωρίζουμε ότι, εάν μια συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σε όλα τα σημεία του πεδίου ορισμού της, τότε η συνάρτηση αυτή θα είναι **συνεχής** σε όλα αυτά τα σημεία[12]. Συνεπώς, η **διπλή** παραγωγισιμότητα της $Y = F(K, L)$ έχει δύο επακόλουθα: πρώτον, ότι η ίδια η συνάρτηση $Y = F(K, L)$ θα είναι συνεχής σε όλους τους συνδυασμούς των K και L που εμπίπτουν στο πεδίο ορισμού της ($K \geq 0, L \geq 0$) και, δεύτερον, ότι συνεχείς θα είναι επίσης, στο πεδίο αυτό, και οι συναρτήσεις των πρώτων μερικών παραγώγων της Y ως προς K και L. Η συνέχεια της αρχικής συνάρτησης $F(K, L)$ καθώς και η συνέχεια των παραγώγων συναρτήσεων $F_K(K, L)$ και $F_L(K, L)$ σημαίνει ότι και οι τρεις αυτές συναρτήσεις θα είναι **ομαλές** με την έννοια ότι οι καμπύλες τους δεν θα παρουσιάζουν, σε κανένα σημείο τους, **κενά** ή **αιχμές**. Όπως θα θυμόμαστε από τα εισαγωγικά μας διαβάσματα στην οικονομική θεωρία, οι πρώτες μερικές παράγωγοι της συνάρτησης παραγωγής $Y = F(K, L)$ ως προς K και ως προς L είναι τα μεγέθη εκείνα που στην νεοκλασική ο-

[12] Η παραγωγισιμότητα μιας συνάρτησης συνεπάγεται και την συνέχειά της, αλλά όχι αντίστροφα. Η τελευταία αποτελεί αναγκαία αλλά όχι και ικανή συνθήκη της πρώτης.

ρολογία αποκαλούνται, αντίστοιχα, **οριακό προϊόν του κεφαλαίου** και **οριακό προϊόν της εργασίας**. Σύμφωνα, λοιπόν, με τα όσα λέχθηκαν προηγουμένως, η ιδιότητα της διπλής παραγωγισιμότητας της $Y = F(K, L)$ διασφαλίζει ότι τόσο η συνάρτηση παραγωγής $Y = F(K, L)$ όσο και οι συναρτήσεις των οριακών προϊόντων του κεφαλαίου και της εργασίας $F_K(K, L)$ και $F_L(K, L)$ θα είναι συνεχείς (ομαλές) σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού τους, το οποίο είναι κοινό και για τις τρεις ($K \geq 0, L \geq 0$).

Η υπόθεση ότι η μακροοικονομική συνάρτηση παραγωγής $Y = F(K, L)$ διαθέτει την ιδιότητα της διπλής παραγωγισιμότητας είναι προφανώς, από άποψη αναλυτική, πολύ ελκυστική. Και αυτό επειδή επιτρέπει σε αυτούς που την υιοθετούν – και που είναι, κατά κύριο λόγο, οικονομολόγοι της νεοκλασικής σχολής – να διατυπώνουν τις βασικές τους προτάσεις σε ό,τι αφορά την θεωρία της παραγωγής (αλλά και της διανομής, όπως θα δούμε σε λίγο) στην γλώσσα του διαφορικού λογισμού όπου κυριαρχεί η έννοια της παραγώγου, δηλαδή της οριακής μεταβολής[13]. Παρά την αναλυτική ελκυστικότητά της, η υπόθεση αυτή παραμένει, ωστόσο, από άποψη οικονομική, αρκετά αμφιλεγόμενη και προβληματική. Πολλοί μη-νεοκλασικοί οικονομολόγοι θεωρούν ότι πίσω από την φαινομενικά ανώδυνη παραδοχή περί διπλής παραγωγισιμότητας της μακροοικονομικής συνάρτησης παραγωγής κρύβεται μια αντίληψη για την υφή της διαθέσιμης τεχνολογίας που φορτίζει την έννοια αυτή με ιδιότητες σχεδόν θαυματουργές. Και μάλιστα σε τέτοιο βαθμό, ώστε να επισκιάζονται, αντί να διαφωτίζονται, πολλές σημαντικές πλευρές των ερωτημάτων, στα οποία καλείται να απαντήσει η θεωρία της παραγωγής και της διανομής και, κατ' επέκταση, και η θεωρία της οικονομικής μεγέθυνσης. Επειδή εδώ θίγεται ένα αρκετά σοβαρό θέμα, αξίζει τον κόπο να ανοίξουμε μια μικρή παρένθεση και να κάνουμε κάποια σύντομα διευκρινιστικά σχόλια. Για να μην μακρηγορούμε, θα στηριχθούμε στα όσα είπαμε προηγουμένως, προς το τέλος της §4.2., για την διάκριση μεταξύ **τεχνολογίας** και **τεχνικής** καθώς και για τον **λόγο κεφαλαίου-εργασίας** K/L, τον οποίο, όπως θα θυμόμαστε, μπορούμε να τον χρησιμοποιήσουμε ως **μέτρο** για να συγκρίνουμε διάφορες τεχνικές και να διαπιστώσουμε ποια από αυτές είναι υψηλότερης **έντασης κεφαλαίου** (ή, για να το πούμε διαφορετικά, όπως συμβαίνει συχνά στην βιβλιογραφία για να διαπιστώσουμε ποια τεχνική είναι αυτή που χαρακτηρίζεται από τον υψηλότερο **βαθμό εκμηχάνισης της παραγωγής**).

Όπως έχει ήδη τονισθεί, εάν αποδεχθούμε την ιδιότητα της διπλής παραγωγισιμότητας της μακροοικονομικής συνάρτησης παραγωγής $Y = F(K, L)$, θα πρέπει να αποδεχθούμε, πρώτα απ' όλα, ότι η συνάρτηση αυτή είναι **συνεχής** σε όλα τα σημεία του πεδίου ορισμού της ($K \geq 0, L \geq 0$). Εάν το καλοσκεφτεί κανείς, η παραδοχή αυτή μας καλεί να αποδεχθούμε την αντίληψη, ότι η οικονομία διαθέτει, σε οποιαδήποτε στιγμή του χρόνου, μια τρομακτικά πλούσια τεχνολογία, τόσο από άποψη συσσωρευμένων γνώσεων όσο και από άποψη δυνατοτήτων προσαρμογής της παραγωγικής διαδικασίας.

[13] Για τον λόγο αυτό, η **νεοκλασική** σχολή ονομάσθηκε, στην πρώτη περίοδο της ανάπτυξής της (αρχές του 20ου αιώνα) και **οριακή** σχολή (marginalism).

Πρόκειται για μια τεχνολογία που είναι τόσο πλούσια σε αποθέματα **τεχνογνωσίας**, ώστε να είναι σε θέση να προσφέρει στην οικονομία ένα **συνεχές φάσμα** απειράριθμων **εναλλακτικών τεχνικών** (δηλαδή, διαφορετικών ποσοτικών συνδυασμών κεφαλαιουχικού εξοπλισμού K και εργασίας L), από το οποίο μπορεί, σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή, να γίνει η **επιλογή** της μίας ή της άλλης τεχνικής (δηλαδή ενός ορισμένου συνδυασμού των K και L) προκειμένου να παραχθεί μια δοσμένη ποσότητα προϊόντος $\overline{Y}$. Το σύνολο όλων αυτών των **άπειρων** σε αριθμό διαθέσιμων τεχνικών, το οποίο μας δίνεται από την σχέση $F(K,L)=\overline{Y}$, περιέχει προφανώς τεχνικές από όλο το φάσμα των διαφορετικών βαθμών εκμηχάνισης της παραγωγής που μπορεί να φαντασθεί κανείς. Ένα φάσμα που αρχίζει με τις πιο «σύγχρονες» τεχνικές τύπου ρομπότ, πολύ υψηλής ή σχεδόν άπειρα μεγάλης έντασης κεφαλαίου ($K/L \to \infty$) και το οποίο φτάνει σταδιακά, μέσα από αλλεπάλληλες συνεχείς μεταβολές του λόγου κεφαλαίου-εργασίας K/L, στις πιο «πρωτόγονες» χειρονακτικές τεχνικές, πολύ χαμηλής ή σχεδόν μηδενικής έντασης κεφαλαίου ($K/L \to 0$).

Εκτός αυτών των φανταστικού εύρους δυνατοτήτων επιλογής τεχνικών, η διαθέσιμη τεχνολογία $Y=F(K,L)$ εμφανίζεται να είναι προικισμένη και με εξίσου φανταστικές δυνατότητες σε ό,τι αφορά την **προσαρμοστικότητα** της παραγωγικής διαδικασίας. Εάν, σε μια ορισμένη χρονική στιγμή, χρησιμοποιείται για την παραγωγή της δοσμένης ποσότητας προϊόντος $\overline{Y}$ μια ορισμένη τεχνική και αλλάξουν ξαφνικά οι συνθήκες που καθόρισαν την επιλογή της τεχνικής αυτής, τότε η οικονομία έχει την δυνατότητα, βάσει της διαθέσιμης τεχνολογίας, να **αναδιαρθρώσει**, μέσα σε μια **στιγμή** και μάλιστα **χωρίς κόστος**, την κληρονομημένη δομή της παραγωγικής διαδικασίας και να **«μεταμορφώσει»** τα χρησιμοποιούμενα αποθέματα μέσων παραγωγής, έτσι ώστε αυτά να πάψουν να είναι εκείνα που ήταν αρχικά και να γίνουν διαφορετικά, αποκτώντας τις ιδιότητες εκείνες που απαιτούνται από την νέα τεχνική που θα επιλεγεί τελικά για να παραχθεί, υπό τις νέες συνθήκες, η δοσμένη ποσότητα προϊόντος $\overline{Y}$. Εάν π.χ. στην αρχική τεχνική χρησιμοποιούνταν μέσα παραγωγής υψηλής έντασης κεφαλαίου που απαιτούν την απασχόληση ενός σχετικά μικρού αριθμού εργαζομένων – λ.χ. αυτοματοποιημένες υψικάμινοι παραγωγής χάλυβα που λειτουργούν με ηλεκτρική ενέργεια –, η στιγμιαία μετάβαση σε μιαν άλλη τεχνική χαμηλότερης έντασης κεφαλαίου προϋποθέτει ότι οι υπάρχουσες αυτοματοποιημένες υψικάμινοι μπορούν να μεταπλασθούν, μέσα σε μια στιγμή, σε διαφορετικά μέσα παραγωγής χάλυβα, τα οποία θα απαιτούν την απασχόληση ενός σχετικά μεγάλου αριθμού εργαζομένων (π.χ. σε χειροκίνητα καμίνια από πλίνθους που λειτουργούν με κάρβουνα).

Αφήνοντας για αργότερα την συζήτηση τέτοιου είδους ενστάσεων, επανερχόμαστε τώρα στην μακροοικονομική συνάρτηση παραγωγής $Y=F(K,L)$ και, υποθέτοντας ότι αυτή είναι διπλά παραγωγίσιμη ως προς K και L, θέτουμε το εξής ερώτημα: πώς είναι δυνατόν να περιγραφεί στην γλώσσα του διαφορικού λογισμού αυτή η φανταστική ικανότητα της διαθέσιμης τεχνολογίας που επιτρέπει την στιγμιαία, ομαλή (συνεχή) και χωρίς κόστος μετάβαση της οικονομίας από την μία στην άλλη τεχνική;

Θα αρχίσουμε με μια παρατήρηση μαθηματικού χαρακτήρα. Όπως είπαμε προηγουμένως, το σύνολο όλων των τεχνικών (δηλαδή όλων των συνδυασμών των συντελεστών παραγωγής K και L) που βρίσκονται στην **ελεύθερη** διάθεση της οικονομίας προκειμένου να παραχθεί, σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή, η δοσμένη ποσότητα προϊόντος $\overline{Y}$ μας δίνεται από τη σχέση $F(K,L)=\overline{Y}$. Από μαθηματική πλευρά, η σχέση αυτή αποτελεί μια πεπλεγμένη (έμμεση) συνάρτηση των μεταβλητών K και L, η οποία μπορεί, υπό ορισμένους όρους, να «επιλυθεί» είτε ως προς K είτε ως προς L. Έτσι, η ρητή (άμεση) σχέση μεταξύ των μεταβλητών K και L που υπονοείται από την πεπλεγμένη συνάρτηση $F(K,L)=\overline{Y}$ μπορεί να διατυπωθεί συναρτησιακά ως $K=K(L,\overline{Y})$ – ή, εναλλακτικά, ως $L=L(K,\overline{Y})$ – και να απεικονισθεί γεωμετρικά ως μια καμπύλη στον δισδιάστατο χώρο K–L. Το γεγονός αυτό μας επιτρέπει, ακόμα και όταν δουλεύουμε την πεπλεγμένη συνάρτηση $F(K,L)=\overline{Y}$, να αναφερόμαστε στην πρώτη, στην δεύτερη κ.ο.κ. παράγωγο της K ως προς L (dK/dL, d^2K/dL^2, κ.ο.κ.), έχοντας πάντοτε κατά νου ότι οι παράγωγοι αυτοί ισχύουν για ένα δοσμένο επίπεδο της μεταβλητής Y ($Y=\overline{Y}$) και ότι ορίζονται σε σχέση με μια ρητή μορφή της πεπλεγμένης συνάρτησης $F(K,L)=\overline{Y}$ που είναι η συνάρτηση $K=K(L,\overline{Y})$.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι η παραγωγή της δοσμένης ποσότητας προϊόντος $\overline{Y}$ συντελείται βάσει μιας ορισμένης τεχνικής που απαιτεί την χρησιμοποίηση K μονάδων φυσικού κεφαλαίου και L μονάδων εργασίας. Ας υποθέσουμε επίσης ότι σε μια ορισμένη χρονική στιγμή μεταβάλλονται οι όροι υπό τους οποίους έγινε αρχικά η επιλογή της τεχνικής αυτής (πράγμα που θα συνδεθεί, όπως θα δούμε σε λίγο, με μια μεταβολή των τιμών εκμίσθωσης των συντελεστών παραγωγής K και L). Τελικά, ας υποθέσουμε επίσης πως οι μεταβολές αυτές οδηγούν στην αντικατάσταση της μέχρι στιγμής χρησιμοποιούμενης τεχνικής από μιαν άλλη, η οποία απαιτεί, για την παραγωγή της ίδιας ποσότητας προϊόντος $\overline{Y}$, διαφορετικές ποσότητες συντελεστών παραγωγής που διαφέρουν από τις αρχικές ποσότητες K και L κατά dK και dL. Το ερώτημα που τίθεται τώρα είναι, εάν η μετάβαση από την πρώτη στην δεύτερη τεχνική συνεπάγεται και την ισχύ μιας δεσμευτικής **σχέσης** ανάμεσα στις, χαρακτηριστικές για την μετάβαση αυτή, **οριακές μεταβολές** των συντελεστών παραγωγής dK και dL. Στον βαθμό που υποθέτουμε πως η συνάρτηση παραγωγής $Y=F(K,L)$ είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) ως προς K και ως προς L, είναι σαφές ότι οι οριακές μεταβολές dK και dL θα οδηγήσουν, από κοινού, σε μια συνολική μεταβολή της παραγωγής κατά ένα ποσό dY, του οποίου το μέγεθος μπορεί να υπολογισθεί με την βοήθεια του κανόνα του ολικού διαφορικού: $dY=F_K dK+F_L dL$. Επειδή, όμως, μελετάμε την μετάβαση από την πρώτη στην δεύτερη τεχνική υπό τον όρο ότι το μέγεθος της παραγωγής παραμένει σταθερό στο επίπεδο $\overline{Y}$, θα ισχύει προφανώς ότι $\overline{Y}=F(K,L)$ και συνεπώς και ότι $d\overline{Y}=F_K dK+F_L dL=0$.

Αναδιατάσσοντας τους όρους της τελευταίας έκφρασης καταλήγουμε στον εντοπισμό της σχέσης, στην οποία αναφερθήκαμε μόλις πριν από λίγο. Ο λόγος των οριακών μεταβολών που υφίστανται οι χρησιμοποιούμενες ποσότητες των συντελεστών παραγωγής κατά την οριακή μετάβαση από μιαν ορισμένη τεχνική σε μιαν άλλη, ισούται με τον αρνητικό και αντίστροφο λόγο των οριακών προϊόντων των συντελεστών παραγωγής:

$$\frac{dK}{dL} = -\frac{F_L(K,L)}{F_K(K,L)}. \tag{21}$$

Το πρώτο που θα πρέπει να σημειωθεί είναι ότι ο λόγος dK/dL στην αριστερή πλευρά της έκφρασης 21 δεν είναι τίποτε άλλο παρά η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης $K = K(L, \overline{Y})$, η οποία αποτελεί την ρητή μορφή της πεπλεγμένης συνάρτησης $F(K, L) = \overline{Y}$. Κοιτάζοντας τώρα και την δεξιά πλευρά της έκφρασης 21 και λαμβάνοντας υπόψη ότι τα οριακά προϊόντα F_K και F_L είναι συναρτήσεις των μεταβλητών K και L, συμπεραίνουμε πως ο λόγος dK/dL θα πρέπει να είναι και αυτός μια συνάρτηση των μεταβλητών K και L. Τούτο σημαίνει ότι κάθε διαφορετική τεχνική (δηλαδή κάθε διαφορετικός συνδυασμός των συντελεστών παραγωγής K και L) που μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την παραγωγή της δοσμένης ποσότητας προϊόντος $\overline{Y}$ θα πρέπει να χαρακτηρίζεται και από έναν διαφορετικού μεγέθους οριακό λόγο dK/dL.

Όμως στο σημείο αυτό, εμφανίζεται ένα σοβαρό πρόβλημα που αφορά το **πρόσημο** του λόγου dK/dL. Εάν αυτό ήταν **θετικό** ($dK/dL > 0$), θα αντιμετωπίζαμε την ιδιόρρυθμη, από άποψη οικονομικής ερμηνείας, περίπτωση όπου, για την παραγωγή της ίδιας ποσότητας προϊόντος $\overline{Y}$, η ήδη χρησιμοποιούμενη τεχνική θα μπορούσε να αντικατασταθεί από μιαν άλλη τεχνική, η οποία θα απαιτούσε, σε σύγκριση με την αρχική τεχνική, περισσότερες ποσότητες και από τους δύο συντελεστές παραγωγής K και L. Στην περίπτωση αυτή η δεύτερη τεχνική είναι προφανώς **μη-αποδοτική** σε σύγκριση με την ήδη χρησιμοποιούμενη τεχνική και, για τον λόγο αυτό, θα πρέπει να **αποκλεισθεί** από το σύνολο των διαθέσιμων τεχνικών $F(K, L) = \overline{Y}$.

(β) Η δεύτερη ιδιότητα: κυρτότητα

Προκειμένου να επιτευχθεί ο **αποκλεισμός** όλων των μη-αποδοτικών τεχνικών αλλά επιπλέον – και αυτό είναι πολύ σημαντικό – προκειμένου να διασφαλισθεί **εκ των προτέρων** (αξιωματικά) και η **ισχύς** κάποιων **«φυσικών νόμων»** της παραγωγής που, σύμφωνα με τη νεοκλασική θεωρία, υποτίθεται ότι καθορίζουν την **παραγωγικότητα** και την **υποκαταστασιμότητα** των συντελεστών παραγωγής, εισάγεται στο σημείο αυτό και μια δεύτερη βασική παραδοχή σε ό,τι αφορά την υφή της διαθέσιμης τεχνολογίας. Σύμφωνα με αυτή τη νέα παραδοχή, η μακροοικονομική συνάρτηση παραγωγής $Y = F(K, L)$ δεν θα πρέπει να είναι μόνον διπλά παραγωγίσιμη αλλά θα πρέπει επίσης να διαθέτει και την ιδιότητα της **κυρτότητας**. Αρχίζουμε, επαναφέροντας στην μνήμη μας την μαθηματική σημασία του όρου. Όταν υποθέτει κανείς ότι μια διμεταβλητή συνάρτηση $Y = F(K, L)$ είναι αυστηρά κυρτή ως προς την αρχή των αξόνων (ή, αλλιώς, κοίλη, εάν απαλειφθεί η αναφορά στην αρχή των αξόνων), τότε υποθέτει ότι η συνάρτηση αυτή είναι τέτοιας μορφής ώστε να εκπληροί, σε όλα τα σημεία του πεδίου ορισμού της ($K \geq 0, L \geq 0$), τις ακόλουθες **δύο συνθήκες**:

➲ πρώτον, οι πρώτες μερικές παράγωγοι της Y ως προς K και ως προς L θα πρέπει να είναι θετικοί αριθμοί

$$\frac{\partial Y}{\partial K} \equiv F_K(K, L) > 0, \ \frac{\partial Y}{\partial L} \equiv F_L(K, L) > 0 \qquad (22)$$

➲ και, δεύτερον, οι δεύτερες μερικές παράγωγοι της Y ως προς K και ως προς L θα πρέπει να είναι αρνητικοί αριθμοί

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial K^2} \equiv F_{KK}(K, L) < 0, \ \frac{\partial^2 Y}{\partial L^2} \equiv F_{LL}(K, L) < 0 \qquad (23)$$

Ποιες είναι οι συνέπειες που έχει για την μαθηματική μορφή της μακροοικονομικής συνάρτησης παραγωγής $Y = F(K, L)$ η διττή υπόθεση ότι η συνάρτηση αυτή είναι διπλά παραγωγίσιμη και ταυτόχρονα και κυρτή; Ξεκινάμε με την πρώτη συνθήκη κυρτότητας 22. Βάσει της έκφρασης 21 διαπιστώνουμε, κατ' αρχάς, ότι η συνθήκη 22 συνεπάγεται πως ο λόγος dK/dL δεν είναι απλώς μια συνάρτηση των μεταβλητών K και L αλλά μια συνάρτηση που είναι συνεχής σε όλα τα σημεία του πεδίου ορισμού της ($K \geq 0, L \geq 0$). Τούτο προκύπτει από τον εξής απλό συλλογισμό. Όπως επισημάνθηκε προηγουμένως, η διπλή παραγωγισιμότητα της $Y = F(K, L)$ συνεπάγεται την συνέχεια της ίδιας της συνάρτησης $Y = F(K, L)$ καθώς και την συνέχεια των συναρτήσεων των οριακών προϊόντων $F_K(K, L)$ και $F_L(K, L)$. Επειδή όμως ο λόγος dK/dL ισούται, σύμφωνα με την 21, με το πηλίκο δύο συνεχών συναρτήσεων και επειδή οι τιμές των συναρτήσεων αυτών αποκλείεται, βάσει της 22, να είναι μηδενικές, συμπεραίνουμε πως ο **λόγος dK/dL** δεν μπορεί παρά να είναι και αυτός μια **συνεχής** συνάρτηση των μεταβλητών K και L. Μια δεύτερη συνέπεια της συνθήκης 22 είναι ότι διασφαλίζει ταυτόχρονα και τον **αποκλεισμό** από την διαθέσιμη τεχνολογία όλων των τεχνικών που δεν είναι αποδοτικές. Όπως φαίνεται αμέσως από την 21, η θετικότητα των οριακών προϊόντων F_K και F_L που προβλέπεται από την συνθήκη 22 συνεπάγεται επίσης και ότι το **πρόσημο** του λόγου dK/dL θα είναι πάντοτε **αρνητικό** ($dK/dL < 0$). Η σημασία του αποτελέσματος αυτού είναι καταφανής. Με δοσμένο το μέγεθος της παραγωγής στο επίπεδο $\overline{Y}$, η οριακή μετάβαση της οικονομίας από μια τεχνική σε μιαν άλλη – δηλαδή η αντικατάσταση ενός ορισμένου συνδυασμού των συντελεστών παραγωγής K και L από έναν άλλο συνδυασμό που διαφέρει από τον πρώτο κατά dK και dL – θα συνοδεύεται από μια, μικρότερου ή μεγαλύτερου βαθμού, **υποκατάσταση** του ενός συντελεστή παραγωγής από τον άλλο. Το γεγονός ότι τώρα, λόγω της συνθήκης κυρτότητας 22, οι χαρακτηριστικές για την μετάβαση αυτή οριακές μεταβολές dK και dL στην έκφραση

21 θα έχουν πάντοτε αντίθετα πρόσημα ($dK/dL < 0$), δικαιολογεί γιατί στον λόγο dK/dL έχει δοθεί και το όνομα **οριακός λόγος τεχνικής υποκατάστασης** (ΟΛΤΥ) του συντελεστή K από τον συντελεστή L (εάν $dK < 0$ και $dL > 0$) ή, αντίστροφα, του συντελεστή L από τον συντελεστή K (εάν $dK > 0$ και $dL < 0$).

Με την πρώτη συνθήκη κυρτότητας 22 που θέλει τον λόγο dK/dL να είναι μια συνεχής συνάρτηση των K και L με πεδίο τιμών που περιλαμβάνει μόνον αρνητικούς αριθμούς ($dK/dL < 0$), η μακροοικονομική συνάρτηση παραγωγής $Y = F(K, L)$ αποκτά μια νέα ιδιότητα που προστίθεται σε αυτές που της έχουν ήδη προσδοθεί από την παραδοχή της διπλής παραγωγισιμότητας. Η έννοια της διαθέσιμης τεχνολογίας ταυτιζόταν, έως τώρα, με τη δυνατότητα της απεριόριστης επιλογής τεχνικών καθώς και την δυνατότητα της στιγμιαίας και χωρίς κόστος αναδιάρθρωσης της παραγωγικής διαδικασίας, πράγμα που καθιστούσε δυνατή, σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή, την ομαλή μετάβαση της οικονομίας από την μία στην άλλη τεχνική. Με την προσθήκη της συνθήκης 22, η έννοια της διαθέσιμης τεχνολογίας πλουτίζεται και με την ιδιότητα της **στιγμιαίας** και **ομαλής** (συνεχούς) **υποκατάστασης** του ενός συντελεστή παραγωγής από τον άλλο. Και μάλιστα μιας υποκατάστασης που είναι **χωρίς όρια**, αφού ο λόγος dK/dL ορίζεται τώρα ως συνεχής συνάρτηση όλων των διαφορετικών ποσοτικών συνδυασμών των συντελεστών παραγωγής K και L που μπορεί να φαντασθεί κανείς, ανεξάρτητα του εάν οι συνδυασμοί αυτοί αντιστοιχούν σε τεχνικές πολύ υψηλής έντασης κεφαλαίου ($K/L \to \infty$) ή σε τεχνικές πολύ χαμηλής έντασης κεφαλαίου ($K/L \to 0$).

Ας εξετάσουμε τώρα και τις συνέπειες της δεύτερης συνθήκης κυρτότητας 23. Όπως υπαινιχθήκαμε προηγουμένως στην §4.1., η παραδοχή περί κυρτότητας της $Y = F(K, L)$ εξυπηρετεί στο σύνολό της (δηλαδή και οι δύο συνθήκες 22 και 23 μαζί) μια γενικότερης εμβέλειας σκοπιμότητα. Με την υιοθέτησή της, η μακροοικονομική συνάρτηση παραγωγής εφοδιάζεται εκ των προτέρων με τις κατάλληλες μαθηματικές ιδιότητες, ώστε να αποδεικνύεται, εκ των υστέρων, ότι οι δυνατότητες της διαθέσιμης τεχνολογίας υπάγονται σε ορισμένους «φυσικούς» ή «τεχνικούς» περιορισμούς που, σύμφωνα με την νεοκλασική θεωρία, είναι αδύνατον να αναιρεθούν από τις γνώσεις, τις βουλές και τις πράξεις των ανθρώπων. Και αυτό επειδή οι περιορισμοί αυτοί υποτίθεται ότι απορρέουν από την οικουμενική ισχύ δύο απαραβίαστων «φυσικών νόμων» της παραγωγής που καθορίζουν, αντίστοιχα, την παραγωγικότητα (αποδοτικότητα) και την υποκαταστασιμότητα των συντελεστών παραγωγής.

Ο πρώτος «φυσικός νόμος» της παραγωγής, που μας είναι γνωστός από τα εισαγωγικά εγχειρίδια ως ο **νόμος του θετικού και φθίνοντος οριακού προϊόντος** κάθε συντελεστή παραγωγής, ισοδυναμεί με την παραδοχή ότι η μακροοικονομική συνάρτηση παραγωγής $Y = F(K, L)$ έχει την εξής ιδιότητα: στην περίπτωση που παραμένει σταθερό το μέγεθος του ενός συντελεστή και αυξηθεί οριακά το μέγεθος του άλλου, τότε η αύξηση αυτή οδηγεί σε μια οριακή αύξηση της παραγωγής, η οποία γίνεται, ωστόσο, όλο και πιο μικρή, όσο περισσότερο αυξάνεται το μέγεθος του μεταβαλλόμενου συντελεστή[14]. Αυτή η φθίνουσα οριακή απόδοση κάθε συντελεστή παραγωγής, η οποία υποτίθεται ότι αποτελεί φυσικό επακόλουθο της μη μεταβλητότητας των άλλων συντελεστών παραγωγής, εκφράζεται, σε όρους του διαφορικού λογισμού, από το αίτημα ότι η πρώτη μερική παράγωγος της $Y = F(K, L)$, τόσο ως προς K όσο και ως προς L, θα πρέπει να είναι θετική, ενώ η δεύτερη μερική παράγωγος θα πρέπει να είναι αρνητική:

$$F_K > 0,\ F_{KK} < 0 \text{ και } F_L > 0,\ F_{LL} < 0. \qquad (24)$$

Συγκρίνοντας τις εκφράσεις 22 και 23 με την έκφραση 24 διαπιστώνουμε ότι η τελευταία δεν είναι τίποτε άλλο παρά μια αναδιάταξη των συνθηκών κυρτότητας 22 και 23. Τούτο σημαίνει ότι για την αποδοχή του πρώτου «φυσικού νόμου» της παραγωγής δεν χρειάζεται να προβλεφθεί καμία νέα μαθηματική ιδιότητα για την συνάρτηση παραγωγής, αφού η ισχύς του νόμου αυτού έχει εκ των προτέρων διασφαλισθεί μέσω της παραδοχής ότι η διπλά παραγωγίσιμη συνάρτηση $Y = F(K, L)$ είναι επίσης και κυρτή ως προς την αρχή των αξόνων.

Ο δεύτερος «φυσικός νόμος» της παραγωγής, του οποίου την ισχύ επικαλείται η νεοκλασική θεωρία, αναφέρεται στην υποκαταστασιμότητα των συντελεστών παραγωγής και είναι γνωστός ως ο νόμος του **αρνητικού και φθίνοντος οριακού λόγου τεχνικής υποκατάστασης** (ΟΛΤΥ) του ενός συντελεστή από τον άλλο. Ο νόμος αυτός προϋποθέτει, βέβαια, την συνεχή (ομαλή) και χωρίς όρια υποκατάσταση μεταξύ των συντελεστών παραγωγής. Διατηρεί, δηλαδή, την παραδοχή ότι οι άπειροι συνδυασμοί των συντελεστών K και L που προσφέρονται από την διαθέσιμη τεχνολογία $Y = F(K, L)$ για την παραγωγή μιας ορισμένης ποσότητας προϊόντος $\overline{Y}$ ($F(K, L) = \overline{Y}$) υπάγονται στον περιορισμό $dK/dL < 0$, σύμφωνα με τον οποίο η οριακή αύξηση του ενός συντελεστή θα πρέπει να συνοδεύεται πάντοτε από μιαν οριακή μείωση του άλλου. Παραδείγματος χάριν, μια αύξηση του συντελεστή «εργασία» κατά dL θα πρέπει να συνοδεύεται πάντοτε από μια μείωση του συντελεστή «κεφάλαιο» κατά dK ($dL > 0$, $dK < 0$). Όμως, ο δεύτερος «φυσικός νόμος» της παραγωγής διατείνεται επιπλέον ότι η **φύση** είναι τόσο **τσιγκούνικη** ή **φειδωλή** ώστε να **δυσκολεύει** την συνεχή υποκατάσταση του συντελεστή K από τον συντελεστή L (ή και αντίστροφα), απαιτώντας μια όλο και πιο μικρή οριακή μείωση του συντελεστή K, καθώς συνεχίζεται η οριακή αύξηση του συντελεστή L. Τούτο σημαίνει ότι το μέγεθος του (αρνητικού) λόγου υποκα-

---

[14] Την παραδοχή αυτή την βρίσκει κανείς και σε κείμενα της Κλασικής Πολιτικής Οικονομίας (π.χ. R. Malthus και D. Ricardo). Με την μόνη διαφορά, ότι εκεί χρησιμοποιείται σε σχέση με την αγροτική διαδικασία παραγωγής, όπου η μεταβλητή K αναφέρεται στον πρωτογενή μη παραγόμενο συντελεστή παραγωγής «έδαφος» (ή, ακριβέστερα, «καλλιεργήσιμη γη»), ο οποίος, στα κλασικά κείμενα, θεωρείται ότι είναι **ομογενής**, αφού μπορεί να μετρηθεί σε **φυσικούς όρους** (π.χ. σε εκτάρια ή σε στρέμματα). Η νεοκλασική θεωρία μεταφέρει ατόφια την παραδοχή αυτή από την αγροτική στην βιομηχανική παραγωγή, μετονομάζοντας απλώς τον συντελεστή K από «έδαφος» σε «κεφάλαιο» (παραγόμενα μέσα παραγωγής). Σύμφωνα με θεωρητικούς της μαρξιστικής και της νεορικαρδιανής σχολής, στους οποίους έγινε αναφορά προηγουμένως (βλ. §4.2.), η μεταφορά αυτή δεν είναι θεμιτή και οδηγεί σε αντιφάσεις, καθότι, στη βιομηχανική παραγωγή, η έννοια του κεφαλαίου αναφέρεται σε ένα **ετερογενές** σύνολο **παραγόμενων** (και όχι πρωτογενών) μέσων παραγωγής, του οποίου το μέγεθος δεν μπορεί να προσδιορισθεί σε φυσικούς αλλά μόνον σε **αξιακούς όρους**.

τάστασης dK/dL θα πρέπει να γίνεται, σε απόλυτους όρους, όλο και πιο μικρό, όσο συνεχίζεται η αύξηση του L – δηλαδή, όσο εξακολουθεί, για την παραγωγή της δοσμένης ποσότητας προϊόντος $\overline{Y}$, να επιλέγονται τεχνικές όλο και πιο χαμηλής έντασης κεφαλαίου, συνεχίζοντας έτσι την υποκατάσταση του συντελεστή K από τον συντελεστή L. Εάν θέλαμε να μεταφράσουμε την απαίτηση αυτή στην γλώσσα του διαφορικού λογισμού, θα λέγαμε ότι η πρώτη παράγωγος του λόγου dK/dL ως προς L – δηλαδή η δεύτερη παράγωγος του K ως προς L – θα πρέπει να παραμένει θετική για όλες τις τιμές του L:

$$\frac{d}{dL}\left(\frac{dK}{dL}\right) \equiv \frac{d^2K}{dL^2} > 0 .$$

Ας δούμε τώρα εάν και υπό ποιους όρους οι δύο βασικές μαθηματικές ιδιότητες (διπλή παραγωγισιμότητα και κυρτότητα), με τις οποίες έχει προικισθεί, μέχρι στιγμής, η μακροοικονομική συνάρτηση παραγωγής $Y = F(K,L)$, διασφαλίζουν την εκπλήρωση και των δύο συνθηκών

$$\frac{dK}{dL} < 0, \quad \frac{d^2K}{dL^2} > 0 \tag{25}$$

από τις οποίες εξαρτάται η ισχύς του δεύτερου «φυσικού νόμου» της παραγωγής. Σε ό,τι αφορά την πρώτη συνθήκη τα πράγματα είναι αρκετά σαφή. Ο προβληματισμός που αναπτύχθηκε προηγουμένως σχετικά με το πρόσημο του λόγου dK/dL (βλ. έκφραση 21) μας διαβεβαιώνει πως ο οριακός λόγος υποκατάστασης dK/dL θα είναι πάντοτε αρνητικός ($dK/dL < 0$). Όμως ανοικτό παραμένει ακόμα το θέμα, εάν οι παραδοχές που έχουν υιοθετηθεί έως τώρα συνεπάγονται και την ισχύ της συνθήκης $d^2K/dL^2 > 0$, η οποία διασφαλίζει τον φθίνοντα χαρακτήρα του οριακού λόγου τεχνικής υποκατάστασης (ΟΛΤΥ) μεταξύ των συντελεστών παραγωγής. Εάν κάναμε τον κόπο να παραγωγίσουμε ως προς L την έκφραση 21 θα καταλήγαμε, βέβαια μετά από κάποιες μακρόσυρτες μαθηματικές πράξεις, στο συμπέρασμα ότι οι συνθήκες κυρτότητας 22 και 23, που εξασφαλίζουν την ισχύ του νόμου περί θετικών και φθινόντων οριακών προϊόντων των συντελεστών παραγωγής, δεν αρκούν για να εξασφαλίσουν και την ισχύ του νόμου περί φθίνοντος ΟΛΤΥ. Η συνθήκη $d^2K/dL^2 > 0$ ισχύει μόνο εάν προστεθούν, στη σειρά των παραδοχών που έχουν ήδη υιοθετηθεί για την μαθηματική μορφή της συνάρτησης $Y = F(K,L)$, και δύο νέες παραδοχές που αναφέρονται στις μερικές σταυροειδείς παραγώγους $F_{KL}(K,L)$ και $F_{LK}(K,L)$ – δηλαδή στην μερική παράγωγο ως προς L της συνάρτησης του οριακού προϊόντος του κεφαλαίου $F_K(K,L)$ καθώς και στην μερική παράγωγο ως προς K της συνάρτησης του οριακού προϊόντος της εργασίας $F_L(K,L)$. Η πρώτη παραδοχή απαιτεί την ισότητα των μερικών παραγώγων F_{KL} και F_{LK} και εξασφαλίζεται μόνο εάν υποτεθεί ότι οι συναρτήσεις $F_{KL}(K,L)$ και $F_{LK}(K,L)$ είναι συνεχείς (θεώρημα Young). Η δεύτερη παραδοχή είναι όμως τελείως αυθαίρετη και μη πειστική, αφού απαιτεί ότι το πρόσημο της F_{KL} (ή, εναλλακτικά, της F_{LK}, λόγω της πρώτης παραδοχής) θα πρέπει να είναι πάντοτε θετικό. Όμως, επειδή δεν υπάρχει κανένα εύλογο επιχείρημα, θεωρητικής ή εμπειρικής υφής, που να καθιστά προβλέψιμο το πρόσημο της μερικής παραγώγου F_{KL} (ή της F_{LK}), είναι προφανές ότι η υπόθεση περί κυρτότητας της αθροιστικής συνάρτησης παραγωγής $Y = F(K, L)$ αφήνει, ουσιαστικά, αθεμελίωτο τον ισχυρισμό περί φθίνοντος ΟΛΤΥ, έναν ισχυρισμό ο οποίος αποτελεί, ωστόσο, βασική προϋπόθεση για την ισχύ πολλών νεοκλασικών θεωρημάτων.

(γ) Η γραφική απεικόνιση της $Y = F(K, L)$

Αποτελεί πάγια παράδοση στην οικονομική θεωρία να παρουσιάζει κανείς και με την βοήθεια γραφικών παραστάσεων (γραφημάτων) τις μαθηματικές συναρτήσεις που εκφράζουν τις σχέσεις που υποθέτει ότι ισχύουν ανάμεσα σε διάφορες οικονομικές μεταβλητές. Στο βαθμό που πρόκειται για μονομεταβλητές συναρτήσεις, δηλαδή για συναρτήσεις με μία ανεξάρτητη μεταβλητή, το εγχείρημα αυτό είναι πάντοτε εφικτό, καθότι η γραφική παράσταση μιας μονομεταβλητής συνάρτησης $y = f(x)$ είναι μια επίπεδη καμπύλη, που μπορεί εύκολα να σχεδιασθεί στον δισδιάστατο χώρο x-y. Όμως τούτο είναι φύσει αδύνατον, όταν πρόκειται για πλειομεταβλητές συναρτήσεις με περισσότερες από δύο ανεξάρτητες μεταβλητές. Και αυτό, επειδή η καμπύλη μιας τέτοιας συνάρτησης είναι μια «υπερεπιφάνεια» τεσσάρων ή και περισσοτέρων διαστάσεων, την οποία αδυνατούμε να αντιληφθούμε παραστατικά, αφού οι αισθήσεις μας περιορίζονται σε τρισδιάστατα σχήματα. Οριακή περίπτωση αποτελούν οι πλειομεταβλητές συναρτήσεις με δύο ανεξάρτητες μεταβλητές, όπως είναι λ.χ. η συνάρτηση παραγωγής $Y = F(K, L)$, της οποίας η γραφική παράσταση είναι μια επιφάνεια στον τρισδιάστατο χώρο L-K-Y. Όμως και εδώ εμφανίζεται ένα, τεχνικού βέβαια χαρακτήρα, πρόβλημα που έχει να κάνει με το γεγονός ότι είναι πολύ δύσκολο, για κάποιον που δεν είναι έμπειρος σχεδιαστής, να απεικονίσει τρισδιάστατα σχήματα σε ένα φύλλο χαρτιού, δηλαδή στον δισδιάστατο χώρο.

Για να αποφύγουμε το τεχνικά δύσκολο έργο της απεικόνισης μιας τρισδιάστατης επιφάνειας στον δισδιάστατο χώρο, καταφεύγουμε συνήθως σε ένα γραφικό τέχνασμα, το οποίο εξηγείται σε όλα τα εγχειρίδια εισαγωγής στην Μικροοικονομική, όταν έρχεται η στιγμή όπου θα πρέπει να παρουσιασθεί γεωμετρικά η συνάρτηση παραγωγής $Y = F(K, L)$ [15]. Σε δοσμένες αποστάσεις από την αρχή των αξόνων L, K και Y (π.χ. στις αποστάσεις L_0, K_0 και Y_0) τέμνουμε την τρισδιάστατη επιφάνεια της καμπύλης $Y = F(K, L)$ με τρία επίπεδα κάθετα προς τους τρεις άξονες L, K και Y, αποκτώντας έτσι τρεις τομές της επιφάνειας $Y = F(K, L)$ που είναι οι τρεις δισδιάστατες καμπύλες

---

[15] Στα εγχειρίδια εκείνα, στα οποία προηγείται η παρουσίαση της θεωρίας του καταναλωτή, το τέχνασμα αυτό εξηγείται με βάση την γραφική απεικόνιση της συνάρτησης ατομικής χρησιμότητας $U = U(C_1, C_2)$.

$Y = F(K, L_0)$, $Y = F(K_0, L)$ και $Y_0 = F(K, L)$. Οι πρώτες δύο αποτελούν καμπύλες **ειδικών συναρτήσεων παραγωγής** με την έννοια ότι απεικονίζουν την εξάρτηση του ύψους της παραγωγής από το μέγεθος ενός και μόνον συντελεστή παραγωγής, υπό την προϋπόθεση ότι παραμένει σταθερό το μέγεθος του άλλου[16]. Η τρίτη καμπύλη, γνωστή με το όνομα καμπύλη **ίσου προϊόντος**, καταγράφει όλους τους διαθέσιμους συνδυασμούς των συντελεστών παραγωγής K και L, μέσω των οποίων είναι δυνατό να παραχθεί μια προκαθορισμένη ποσότητα προϊόντος Y_0.

Στον βαθμό που γνωρίζουμε τις γεωμετρικές τους μορφές, μπορούμε να αποσπάσουμε από αυτές τις τρεις καμπύλες όλες εκείνες τις πληροφορίες που θα αποκτούσαμε, εάν είχαμε τη δυνατότητα να μελετήσουμε απευθείας την τρισδιάστατη καμπύλη της συνάρτησης παραγωγής $Y = F(K, L)$. Εξυπακούεται, βέβαια, ότι οι γεωμετρικές μορφές των καμπυλών $Y = F(K, L_0)$, $Y = F(K_0, L)$ και $Y_0 = F(K, L)$ καθώς και οι καμπύλες των παραγώγων τους $F_K(K, L_0)$, $F_L(K_0, L)$ και dK/dL θα πρέπει να καθορίζονται από τις μαθηματικές ιδιότητες, που έχουν ήδη υποθέσει ότι διαθέτει η αρχική συνάρτηση $Y = F(K, L)$. Οι ιδιότητες αυτές καθορίζονται από τις βασικές παραδοχές, που χαρακτηρίζουν τη νεοκλασική αντίληψη για την υφή της τεχνολογίας. Και όπως έχει ήδη διευκρινισθεί, ιδιάζον γνώρισμα της αντίληψης αυτής είναι ότι η μακροοικονομική συνάρτηση παραγωγής $Y = F(K, L)$ θα πρέπει να εκπληροί:

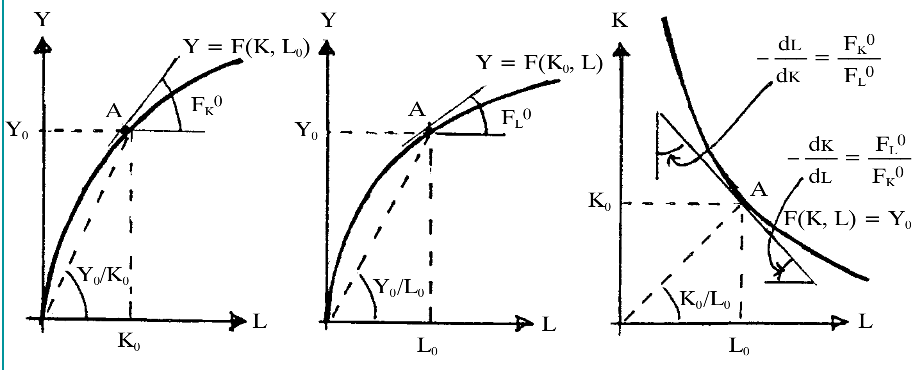
- πρώτον, το κριτήριο της διπλής παραγωγισιμότητας,
- δεύτερον, το κριτήριο των θετικών και φθίνοντων οριακών προϊόντων των συντελεστών παραγωγής και
- τρίτον, το κριτήριο του αρνητικού και φθίνοντος οριακού λόγου τεχνικής υποκατάστασης (ΟΛΤΥ) μεταξύ των συντελεστών παραγωγής.

Όπως έχουμε με αρκετή λεπτομέρεια επιχειρηματολογήσει στην §4.3.α, βασική συνέπεια του πρώτου κριτηρίου είναι ότι οι καμπύλες και των τριών συναρτήσεων $Y = F(K, L_0)$, $Y = F(K_0, L)$ και $Y_0 = F(K, L)$ καθώς και οι καμπύλες των παραγώγων τους $F_K(K, L_0)$, $F_L(K_0, L)$ και dK/dL θα πρέπει να είναι όλες τους **ομαλές** (συνεχείς). Τούτο σημαίνει ότι οι γεωμετρικές τους μορφές, όποιες και αν είναι αυτές, δεν θα πρέπει να παρουσιάζουν κενά ή αιχμές σε κανένα σημείο του πεδίου ορισμού τους. Πέραν τούτου, μπορεί επίσης εύκολα να διαπιστωθεί πως το δεύτερο κριτήριο που προβλέπει την ισχύ του νόμου περί θετικών και φθίνοντων οριακών προϊόντων των συντελεστών παραγωγής (βλ. συνθήκη 24) συνεπάγεται ότι οι ομαλές καμπύλες των ειδικών συναρτήσεων παραγωγής $Y = F(K, L_0)$ και $Y = F(K_0, L)$ θα πρέπει να έχουν την ει-

---

[16] Στη νεοκλασική μακροοικονομική θεωρία, η συνάρτηση $Y = F(K_0, L)$ ονομάζεται **βραχυχρόνια συνάρτηση παραγωγής**, μιας και υποτίθεται ότι στην «βραχυχρόνια περίοδο» μεταβάλλεται μόνο το επίπεδο της απασχόλησης L, ενώ το απόθεμα φυσικού κεφαλαίου K θεωρείται ότι παραμένει σταθερό σε ένα δοσμένο επίπεδο K_0 (μηδενική συσσώρευση κεφαλαίου).

δική εκείνη γεωμετρική μορφή που έχει σχεδιασθεί στο σχήμα 8.α και, αντίστοιχα, στο σχήμα 8.β. Θα πρέπει δηλαδή να είναι μονοτονικά **αύξουσες** και ταυτόχρονα και **κυρτές** ως προς τον οριζόντιο άξονα. Ας διερευνήσουμε, για παράδειγμα, την μορφή της καμπύλης $Y = F(K, L_0)$, για την οποία θα πρέπει να ισχύει, βάσει της συνθήκης 24, ότι $\partial Y/\partial K \equiv F_K > 0$ και $\partial^2 Y > \partial K^2 \equiv F_{KK} < 0$. Η θετικότητα του οριακού προϊόντος του κεφαλαίου ($F_K > 0$) απαιτεί ότι, όποιο και αν είναι το μέγεθος του χρησιμοποιούμενου κεφαλαίου K, η οριακή αύξησή του θα πρέπει να προκαλεί πάντοτε μιαν οριακή αύξηση του παραγόμενου προϊόντος Y. Τούτο ισοδυναμεί, από άποψη γεωμετρική, με την απαίτηση ότι, για οποιαδήποτε τιμή του K, η κλίση της καμπύλης $Y = F(K, L_0)$ θα πρέπει να είναι πάντοτε θετική. Επειδή όμως το γεγονός αυτό συνεπάγεται έναν θετικό συσχετισμό μεταξύ των μεταβλητών Y και K, η καμπύλη της συνεχούς συνάρτησης $Y = F(K, L_0)$ θα πρέπει να εμφανίζεται στο σχήμα 8.α με μια μονοτονικά αύξουσα μορφή, η οποία μπορεί, βέβαια, να είναι γραμμική, κοίλη ή κυρτή ως προς τον οριζόντιο άξονα K. Από τον φθίνοντα χαρακτήρα του οριακού προϊόντος του κεφαλαίου ($F_{KK} < 0$) συμπεραίνουμε, ωστόσο, ότι η μορφή της καμπύλης $Y = F(K, L_0)$ στο σχήμα 8.α δεν μπορεί παρά να είναι κυρτή ως προς τον οριζόντιο άξονα. Και αυτό, επειδή η θετική κλίση της $Y = F(K, L_0)$ – που ισούται εξ ορισμού με το οριακό προϊόν του κεφαλαίου F_K – γίνεται, εξ υποθέσεως, όλο και πιο μικρή ($F_{KK} < 0$) καθώς αυξάνεται το μέγεθος της μεταβλητής K. Από τις παρατηρήσεις που προηγήθηκαν προκύπτει αβίαστα ότι η καμπύλη του οριακού προϊόντος του κεφαλαίου $F_K(K, L_0)$ θα πρέπει να είναι



($F_K > 0$, $F_{KK} < 0$) (α) — ($F_L > 0$, $F_{LL} < 0$) (β) — ($dK / dL < 0$, $d^2K / dL^2 > 0$) (γ)

Σχήμα 8.

μονοτονικά φθίνουσα και κοίλη ως προς τον οριζόντιο άξονα K. Αν ακολουθήσει κανείς τα ίδια επιχειρήματα που αναπτύχθηκαν προηγουμένως, αλλά τούτη τη φορά σε σχέση με την ειδική συνάρτηση παραγωγής $Y = F(K_0, L)$, θα καταλήξει, το ίδιο εύκολα, στο συμπέρασμα: πρώτον, ότι η καμπύλη της $Y = F(K_0, L)$ θα είναι επίσης μονοτονικά αύξουσα και κυρτή ως προς τον οριζόντιο άξονα L (βλ. σχήμα 8.β) και, δεύτερον, ότι η καμπύλη του οριακού προϊόντος της εργασίας $F_L(K_0, L)$ θα είναι και αυτή μονοτονικά φθίνουσα και κυρτή ως προς τον οριζόντιο άξονα L.

Απομένει τώρα να δείξουμε ότι το τρίτο κριτήριο (αρνητικός και φθίνον ΟΛΤΥ) είναι αυτό που καθορίζει, μαζί με το δεύτερο κριτήριο, την γεωμετρική μορφή της καμπύλης ίσου προϊόντος $F(K, L) = Y_0$. Υπενθυμίζουμε ότι εδώ έχουμε να κάνουμε με μια πεπλεγμένη συνάρτηση των μεταβλητών K και L, η οποία, όπως φαίνεται και από την ρητή της μορφή $K = K(L, Y_0)$, θα απεικονίζεται σε ένα δισδιάστατο χώρο, όπου στον οριζόντιο άξονα θα καταγράφονται οι τιμές της μεταβλητής L και στον κάθετο άξονα οι αντίστοιχες τιμές της μεταβλητής K. Υπενθυμίζουμε επίσης ότι η συνάρτηση αυτή είναι συνεχής, πράγμα που σημαίνει ότι η καμπύλη της στον δισδιάστατο χώρο L-K δεν θα παρουσιάζει κενά ή αιχμές, αλλά θα είναι ομαλή. Το ερώτημα που τίθεται τώρα είναι εάν μπορούμε να προσδιορίσουμε την μορφή της καμπύλης $F(K, L) = Y_0$, υποθέτοντας την ισχύ της παραδοχής περί αρνητικού και φθίνοντος ΟΛΤΥ. Επειδή η παραδοχή αυτή προβλέπει (βλ. έκφραση 25) ότι η συνάρτηση $F(K, L) = Y_0$ ικανοποιεί τις συνθήκες $dK/dL < 0$ και $d^2K/dL^2 > 0$, η απάντηση στο ερώτημα αυτό είναι πολύ απλή. Η υπόθεση ότι η κλίση της καμπύλης $F(K, L) = Y_0$ είναι πάντοτε αρνητική ($dK/dL < 0$) σημαίνει ότι η καμπύλη αυτή θα έχει φθίνουσα μορφή. Ταυτόχρονα ισχύει όμως και η υπόθεση $d^2K/dL^2 > 0$, η οποία προβλέπει ότι η αρνητική κλίση dK/dL θα γίνεται όλο και πιο μεγάλη (ή, σε απόλυτους όρους, όλο και πιο μικρή) όσο αυξάνεται το μέγεθος της μεταβλητής L. Τούτο σημαίνει, βέβαια, ότι η γεωμετρική μορφή της καμπύλης $F(K, L) = Y_0$ στον δισδιάστατο χώρο L-K θα πρέπει να είναι όχι μόνον φθίνουσα αλλά και κυρτή ως προς την αρχή των αξόνων, γεγονός που έχει απεικονισθεί και στο σχήμα 8.γ.

Έχοντας προσδιορίσει τους παράγοντες που καθορίζουν την μορφή των τριών καμπυλών $Y = F(K, L_0)$, $Y = F(K_0, L)$ και $F(K, L) = Y_0$ στα τρία διαγράμματα του σχήματος 8, μπορούμε να προχωρήσουμε ένα βήμα παρά πέρα και να εντοπίσουμε στα διαγράμματα αυτά την γεωμετρική ερμηνεία ορισμένων εννοιών που χρησιμοποιούνται συχνά κατά την διατύπωση βασικών προτάσεων της θεωρίας της παραγωγής, της διανομής και της οικονομικής μεγέθυνσης. Το σημείο A και στις τρεις καμπύλες του σχήματος 8 καταγράφει, από τρεις διαφορετικές σκοπιές, την κατάσταση που βρίσκεται η οικονομία σε μια ορισμένη χρονική στιγμή t ($t = 0$), κατά την οποία έχει γίνει η επιλογή να παραχθεί μια ορισμένη ποσότητα προϊόντος Y_0 βάσει μιας ορισμένης τεχνικής, που απαιτεί την χρησιμοποίηση K_0 μονάδων κεφαλαίου και L_0 μονάδων εργασίας.

Αρχίζουμε, σχολιάζοντας τα διαγράμματα 8.α και 8.β. Σύμφωνα με την γεωμετρική ερμηνεία της πρώτης παραγώγου, η κλίση της εφαπτομένης ευθείας στο σημείο Α των καμπυλών $Y = F(K, L_0)$ και $Y = F(K_0, L)$ μας δείχνει το μέγεθος του **οριακού προϊόντος** του κεφαλαίου F_K^0 και, αντίστοιχα, του οριακού προϊόντος της εργασίας F_L^0 (ας σημειωθεί, ότι στα μεγέθη αυτά δίνεται συχνά και το όνομα οριακή παραγωγικότητα ή αποδοτικότητα του κεφαλαίου και, αντίστοιχα, της εργασίας). Από την άλλη μεριά, η κλίση της ευθείας που συνδέει, σε κάθε καμπύλη, το σημείο Α με την αρχή των αξόνων μας δείχνει το μέγεθος των λόγων Y_0/K_0 και Y_0/L_0. Οι λόγοι αυτοί δεν είναι τίποτε άλλο παρά το **ανά μονάδα ή μέσο προϊόν** του κεφαλαίου και, αντίστοιχα, της εργασίας (μέση παραγωγικότητα ή αποδοτικότητα του κεφαλαίου και της εργασίας).

Όπως φαίνεται και από την κυρτότητα των καμπυλών $Y = F(K, L_0)$ και $Y = F(K_0, L)$ στα σχήματα 8.α και 8.β, λογική συνέπεια της παραδοχής περί φθινόντων οριακών προϊόντων των συντελεστών παραγωγής είναι, όχι μόνο το γεγονός ότι το μέσο προϊόν κάθε συντελεστή έχει και αυτό φθίνοντα χαρακτήρα, αλλά και το γεγονός ότι το μέγεθος του οριακού προϊόντος είναι πάντοτε πιο μικρό από το μέγεθος του μέσου προϊόντος ($F_K < Y/K$ και $F_L < Y/L$). Αυτή η ιδιάζουσα σχέση μεταξύ οριακών και μέσων προϊόντων μας επιτρέπει να αποκτήσουμε και μια εικόνα για το μέγεθος της (μερικής) **ελαστικότητας της παραγωγής** σε σχέση με οριακές μεταβολές των συντελεστών παραγωγής K και L. Όπως θα θυμόμαστε από την Μικροοικονομική θεωρία, με δεδομένη την συνάρτηση παραγωγής $Y = F(K, L)$, η μερική ελαστικότητα της παραγωγής ως προς K (ή ως προς L) αναφέρεται στην ποσοστιαία μεταβολή που υφίσταται το μέγεθος της παραγωγής Y στην περίπτωση που μεταβληθεί κατά ένα ορισμένο ποσοστό το μέγεθος του συντελεστή K (ή του συντελεστή L), υπό την προϋπόθεση ότι διατηρείται σταθερό το μέγεθος του άλλου συντελεστή. Για να είμαστε μάλιστα και πιο ακριβείς, η ελαστικότητα της παραγωγής Y ως προς τον συντελεστή K (ή, αντίστοιχα, ως προς τον συντελεστή L) ορίζεται ως το πηλίκο της ποσοστιαίας μεταβολής της Y ($\equiv \partial Y/Y$) και της ποσοστιαίας μεταβολής της K ($\equiv \partial K/K$) – ή, αντίστοιχα, της ποσοστιαίας μεταβολής της L ($\equiv \partial L/L$). Συμβολίζοντας, λοιπόν, τις δύο αυτές ελαστικότητες με ε_K και ε_L, έχουμε εξ ορισμού:

$$\varepsilon_K \equiv \frac{\partial Y/Y}{\partial K/K} = \frac{K}{Y} \cdot \frac{\partial Y}{\partial K} = \frac{KF_K}{Y}, \quad \varepsilon_L \equiv \frac{\partial Y/Y}{\partial L/L} = \frac{L}{Y} \cdot \frac{\partial Y}{\partial L} = \frac{LF_L}{Y}. \tag{26}$$

Από την αναδιάταξη των όρων και των δύο αυτών ορισμών προκύπτει προφανώς το συμπέρασμα, ότι οι ελαστικότητες ε_K και ε_L θα ισούνται με το πηλίκο των αντίστοιχων οριακών και μέσων προϊόντων:

$$\varepsilon_K = \frac{F_K}{Y/K}, \quad \varepsilon_L = \frac{F_L}{Y/L}. \tag{26΄}$$

Αφού, όμως, έχουμε ήδη διαπιστώσει ότι, υπό καθεστώς θετικών και φθινόντων οριακών προϊόντων, ισχύουν οι ανισότητες $F_K < Y/K$ και $F_L < Y/L$, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η αριθμητική τιμή των ελαστικοτήτων ε_K και ε_L θα είναι πάντοτε θετική και μικρότερη της μονάδας ($0<\varepsilon_K<1$, $0<\varepsilon_L<1$).

Ας προχωρήσουμε τώρα στον σχολιασμό του σχήματος 8.γ, στο οποίο έχει σχεδιασθεί η κυρτή ως προς την αρχή των αξόνων καμπύλη ίσου προϊόντος $F(K,L)=Y_0$. Κάθε σημείο της καμπύλης αυτής αντιστοιχεί σε έναν ορισμένο συνδυασμό των συντελεστών παραγωγής K και L, δηλαδή σε μια ορισμένη τεχνική, βάσει της οποίας είναι δυνατό να παραχθεί η ποσότητα προϊόντος Y_0. Η κλίση της ευθείας που συνδέει την αρχή των αξόνων με ένα οποιοδήποτε σημείο της καμπύλης ίσου προϊόντος (π.χ. το σημείο Α που αντιστοιχεί στην τεχνική $(K_0,L_0)\rightarrow Y_0$) μας δείχνει τον χαρακτηριστικό για την χρησιμοποιούμενη τεχνική λόγο κεφαλαίου-εργασίας K/L. Ο λόγος αυτός, τον οποίο τον ονομάσαμε προηγουμένως και ένταση κεφαλαίου, αποτελεί δείκτη του βαθμού εκμηχάνισης της παραγωγικής διαδικασίας (ή, καλύτερα, της εργασιακής) με την έννοια ότι μας πληροφορεί ως προς το εάν οι εργαζόμενοι που απασχολούνται για την παραγωγή της ποσότητας προϊόντος Y_0 είναι εφοδιασμένοι, κατά μέσο όρο, με μια σχετικά μεγάλη ή με μια σχετικά μικρή ποσότητα κεφαλαιουχικού εξοπλισμού. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει επίσης και η κλίση της εφαπτομένης ευθείας σε οποιοδήποτε σημείο της καμπύλης ίσου προϊόντος. Όπως έχει καταγραφεί στο σχήμα 8.γ (βλ. σημείο Α), η κλίση της ευθείας αυτής σε σχέση με τον οριζόντιο άξονα L είναι ο λόγος οριακής υποκατάστασης dK/dL, ενώ η κλίση της σε σχέση με τον κάθετο άξονα K είναι ο οριακός λόγος υποκατάστασης dL/dK, ο οποίος αποτελεί, εξ ορισμού, την αντίστροφο του dK/dL. Επειδή η αντικατάσταση μιας ορισμένης τεχνικής από μια άλλη οδηγεί πάντοτε σε μια, μικρότερου ή μεγαλύτερου βαθμού, υποκατάσταση του ενός συντελεστή από τον άλλο – γεγονός που αντανακλάται και στην αρνητική κλίση της καμπύλης ίσου προϊόντος στο σχήμα 8.γ – είναι προφανές ότι ο οριακός λόγος dK/dL και η αντίστροφός του dL/dK θα είναι πάντοτε αρνητικοί αριθμοί. Και όπως έχει ήδη επισημανθεί (βλ. έκφραση 21), το μέγεθος της αριθμητικής τιμής, σε απόλυτους όρους, των αρνητικών λόγων dK/dL και dL/dK (δηλαδή το μέγεθος των θετικών αριθμών $-dK/dL$ και $-dL/dK$) θα πρέπει να ισούται με τον αντίστροφο λόγο των θετικών οριακών προϊόντων των συντελεστών παραγωγής: $-dK/dL=F_L/F_K$ και $-dL/dK=F_K/F_L$. Μιας και μιλήσαμε προηγουμένως για τις ελαστικότητες ε_K και ε_L των ειδικών συναρτήσεων παραγωγής $Y=F(K,L_0)$ και $Y=F(K_0,L)$, ας πούμε τώρα και δυο λόγια για την ελαστικότητα της καμπύλης ίσου προϊόντος $F(K,L)=Y_0$. Ορίζοντας την ελαστικότητα της καμπύλης αυτής (βλ. σχήμα 8.γ) ως το πηλίκο της ποσοστιαίας μεταβολής της μεταβλητής L ($=dL/L$) και της ποσοστιαίας μεταβολής της μεταβλητής K ($=dK/K$) και συμβολίζοντάς την με ε_{LK}, έχουμε την έκφραση

$$\varepsilon_{LK}=\frac{dL/L}{dK/K}=\frac{K}{L}\frac{dL}{dK}$$

την οποία, επειδή $dL/dK=-F_K/F_L$, μπορούμε να αναδιατυπώσουμε και ως εξής:

$$\varepsilon_{LK} = -\frac{KF_K}{LF_L}. \tag{27}$$

Εάν διαιρέσουμε τον αριθμητή και τον παρονομαστή της δεξιάς πλευράς της 27 με Y και λαμβάνοντας υπόψη τους ορισμούς 26, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η ελαστικότητα της καμπύλης ίσου προϊόντος είναι ένας αρνητικός αριθμός ($\varepsilon_{LK} < 0$) του οποίου το απόλυτο μέγεθος $-\varepsilon_{LK}$ ισούται με τον λόγο των μερικών ελαστικοτήτων της παραγωγής ε_K και ε_L:

$$-\varepsilon_{LK} = \frac{\varepsilon_K}{\varepsilon_L}. \tag{27΄}$$

Επειδή από εδώ και πέρα θα αναφερόμαστε συχνά στους λόγους K/L, $-dL/dK$ και $-dK/dL$, καλό θα ήταν να αρχίσουμε από τώρα να χρησιμοποιούμε γι' αυτούς κάποιους πιο σύντομους συμβολισμούς. Για την ένταση κεφαλαίου, δηλαδή για τον λόγο κεφαλαίου-εργασίας K/L, θα χρησιμοποιούμε το μικρό λατινικό γράμμα k ($k = K/L$), ενώ τον λόγο οριακής υποκατάστασης $-dL/dK$ θα τον συμβολίζουμε με το λατινικό κεφαλαίο γράμμα R: $R = -dL/dK = F_K/F_L$. Σε ό,τι αφορά τον οριακό λόγο $-dK/dL$, δεν είναι αναγκαίο να υιοθετήσουμε έναν ιδιαίτερο συμβολισμό, αφού ο λόγος αυτός, όντας η αντίστροφος του λόγου $-dL/dK$, μπορεί αυτονόητα να συμβολιστεί με $1/R$.

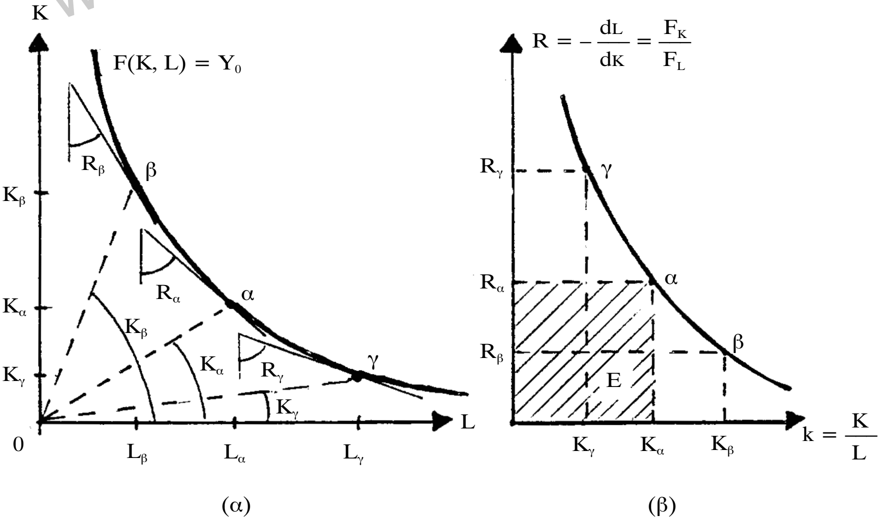
Επανερχόμαστε τώρα στην καμπύλη ίσου προϊόντος $F(K,L) = Y_0$ του σχήματος 8.γ και την σχεδιάζουμε ξανά στο σχήμα 9.α χρησιμοποιώντας, τούτη τη φορά, τους νέους συμβολισμούς k και R. Αν ήταν να εντοπίσουμε την διαφορά ανάμεσα στην τεχνική που καταγράφεται στο σχήμα 9.α από το σημείο α και σε οποιαδήποτε άλλη τεχνική μέσω της οποίας μπορεί επίσης να παραχθεί η δοσμένη ποσότητα προϊόντος Y_0, θα λέγαμε ότι η τεχνική α χαρακτηρίζεται από έναν λόγο κεφαλαίου-εργασίας K/L ίσο με k_α και από έναν λόγο οριακής υποκατάστασης $-dL/dK$ ίσο με R_α ($= F_K^\alpha / F_L^\alpha$)[17]. Κάθε άλλη διαθέσιμη τεχνική – δηλαδή κάθε άλλο σημείο της καμπύλης $F(K,L) = Y_0$ – θα χαρακτηρίζεται από έναν λόγο κεφαλαίου-εργασίας k που θα είναι διαφορετικός του k_α καθώς και από έναν λόγο οριακής υποκατάστασης R που θα είναι και αυτός διαφορετικός του R_α. Ας συγκρίνουμε π.χ., στο σχήμα 9.α, την τεχνική που αντιστοιχεί στο σημείο α με αυτήν που αντιστοιχεί στο σημείο β. Παρατηρώντας τις διαφορές ανάμεσα στις κλίσεις των γωνιών που ταυτίζονται με τα μεγέθη k και R, διαπιστώνουμε αμέσως ότι, σε σύγκριση με την τεχνική α, η τεχνική β χαρακτηρίζεται από έναν υψηλότερο λόγο κεφαλαίου-εργασίας ($k_\beta > k_\alpha$) και από έναν χαμηλότερο λόγο οριακής υποκατάστασης R ($R_\beta < R_\alpha$). Αυτή η αντίστροφη σχέση ανάμεσα στα μεγέθη k και R είναι βέβαια γενικής ισχύος, αφού μπορεί εύκολα να επιβεβαιωθεί από την σύγκριση του σημείου α με οποιο-

---

[17] Είναι προφανές ότι δεν χρειάζεται να αναφερθούμε και στο μέγεθος του οριακού λόγου υποκατάστασης $-dK/dL$, αφού αυτό είναι η αντίστροφος του λόγου $-dL/dK$ και ισούται με $1/R_\alpha$.

δήποτε άλλο σημείο της καμπύλης $F(K,L)=Y_0$. Συγκρίνοντας π.χ. το σημείο α με το σημείο γ, βλέπουμε πως η διαφορά ανάμεσα στην τεχνική που αντιστοιχεί στο σημείο α και σε αυτήν που αντιστοιχεί στο σημείο γ έγκειται στο γεγονός, ότι η τεχνική γ χαρακτηρίζεται από έναν χαμηλότερο λόγο κεφαλαίου-εργασίας k ($k_\gamma < k_\alpha$) και από έναν υψηλότερο λόγο οριακής υποκατάστασης R ($R_\gamma > R_\alpha$). Η μεταφορά των αποτελεσμάτων της σύγκρισης αυτής μεταξύ των σημείων α, β και γ του σχήματος 9.α σε ένα άλλο σχήμα με άξονες τις μεταβλητές k και R (βλ. σχήμα 9.β) μας οδηγεί στο ακόλουθο **γενικό συμπέρασμα**. Σε κάθε δοσμένη **καμπύλη ίσου προϊόντος** που είναι εξ ορισμού κυρτή, αντιστοιχεί μια άλλη, επίσης κυρτή, καμπύλη που θα την ονομάσουμε **καμπύλη υποκατάστασης** και η οποία απεικονίζει την χαρακτηριστική για την δοσμένη καμπύλη ίσου προϊόντος **αντίστροφη σχέση** ανάμεσα στον λόγο κεφαλαίου-εργασίας k και στον λόγο οριακής υποκατάστασης R.

Η αιτία που μας ώθησε να δώσουμε στην καμπύλη του σχήματος 9.β το όνομα καμπύλη υποκατάστασης είναι το γεγονός ότι, σε σύγκριση με την αρχική καμπύλη ίσου προϊόντος στο σχήμα 9.β, μας προσφέρει μια πιο σαφή εικόνα του τι ακριβώς συμβαίνει με την υποκατάσταση των συντελεστών παραγωγής, όταν μια ορισμένη τεχνική



Σχήμα 9.

(π.χ. η τεχνική α) αντικαθίσταται από μια άλλη (π.χ. από την τεχνική β). Εάν δεν χρησιμοποιούσαμε βοηθητικές γεωμετρικές κατασκευές (εφαπτόμενες ευθείες και κλίσεις γωνιών), το μόνο που θα μπορούσαμε να πούμε, βάσει του σχήματος 9.α, είναι ότι η τεχνική β επιτρέπει να παραχθεί η ίδια ποσότητα προϊόντος Y_0 με μια μικρότερη ποσότητα εργασίας ($L_\beta < L_\alpha$) και με μια μεγαλύτερη ποσότητα κεφαλαίου ($K_\beta > K_\alpha$) πράγμα που συνεπάγεται την υποκατάσταση $L_\alpha - L_\beta$ μονάδων εργασίας από $K_\beta - K_\alpha$ μονάδες κεφαλαίου. Εάν όμως είχαμε χρησιμοποιήσει, αντί του σχήματος 9.α, το σχήμα 9.β, θα μπορούσαμε να πούμε αμέσως ότι η υποκατάσταση αυτή αποτελεί προϊόν της μετάβασης της οικονομίας, από μια τεχνική σχετικά χαμηλής έντασης κεφαλαίου, σε μια τεχνική σχετικά υψηλής έντασης κεφαλαίου ($k_\beta > k_\alpha$), μιας μετάβασης που συνοδεύεται, ωστόσο, από μια μείωση του οριακού προϊόντος του κεφαλαίου F_K σε σχέση με το οριακό προϊόν της εργασίας: $(F_K/F_L)_\beta < (F_K/F_L)_\alpha$. Η συνεχής εισαγωγή τεχνικών όλο και πιο υψηλής έντασης κεφαλαίου θα σημαδευόταν, συνεπώς, και από μια **τάση συνεχούς υποκατάστασης** του συντελεστή παραγωγής εργασία από τον συντελεστή παραγωγής κεφάλαιο καθώς και από μια **πτωτική τάση** της οριακής παραγωγικότητας του κεφαλαίου σε σχέση με την οριακή παραγωγικότητα της εργασίας[18].

Αν και είναι σαφώς πιο εύγλωττη από την καμπύλη ίσου προϊόντος, η καμπύλη υποκατάστασης δεν μας προσφέρει, ουσιαστικά, τίποτε το καινούριο. Απλώς αναδιατυπώνει, με διαφορετικούς όρους, τα όσα εμπεριέχονται στην βασική παραδοχή ότι η καμπύλη ίσου προϊόντος είναι συνεχής και, προπάντων, κυρτή ως προς την αρχή των αξόνων. Το γεγονός ότι οι πληροφορίες που κρύβονται πίσω από την καμπύλη ίσου προϊόντος εμφανίζονται ρητά στην αντίστοιχη καμπύλη υποκατάστασης μπορεί επίσης να το διατυπώσει κανείς, εξετάζοντας το πώς ακριβώς εμφανίζεται η ελαστικότητα της καμπύλης ίσου προϊόντος στο σχήμα της καμπύλης υποκατάστασης. Το απόλυτο μέγεθος της ελαστικότητας αυτής που το συμβολίζουμε με $-\varepsilon_{LK}$ ισούται, όπως δείξαμε πριν από λίγο, με το πηλίκο των μερικών ελαστικοτήτων της παραγωγής ε_K και ε_L: $-\varepsilon_{KL} = \varepsilon_K/\varepsilon_L$. Εάν πάρουμε π.χ. το σημείο α της καμπύλης ίσου προϊόντος στο σχήμα 9.α, είναι προφανές ότι μας είναι αδύνατο να εντοπίσουμε γεωμετρικά, στο σχήμα αυτό, το μέγεθος $-\varepsilon_{LK}$. Όμως, εάν στρέψουμε το βλέμμα μας στην αντίστοιχη καμπύλη υποκατάστασης, μπορούμε να διαπιστώσουμε αμέσως ότι το μέγεθος $-\varepsilon_{LK}$ μας δίνεται από το εμβαδόν του ορθογωνίου που σχηματίζουν οι συντεταγμένες του σημείου α στο σχήμα 9.β με τους κάθετους άξονες k και R (βλ. το σκιασμένο ορθογώνιο στο σχήμα 9.β). Και τούτο για τον εξής απλούστατο λόγο. Αφού οι συντεταγμένες ενός οποιουδήποτε σημείου της καμπύλης υποκατάστασης είναι k και R, το εμβαδόν E του ορθογωνίου που σχηματίζεται από αυτές και τους δύο κάθετους άξονες θα ισούται με το γινόμενο των k και R: $E = kR$. Το γεγονός ότι $k = K/L$ και $R = F_K/F_L$, μας επιτρέπει να αναδιατυπώσουμε το γινόμενο $E = kR$ και να γράψουμε $E = (KF_K)/(LF_L)$. Επειδή όμως σύμφωνα με την 27, η δεξιά πλευρά της έκφρασης αυτής ισούται με $-\varepsilon_{LK}$, καταλήγουμε σε αυτό που θέλαμε

[18] Επειδή, στη νεοκλασική θεωρία, η οριακή παραγωγικότητα του κεφαλαίου θα ταυτισθεί με το ποσοστό κέρδους, πρέπει από τώρα να επισημανθεί, ώστε να μην δημιουργηθούν αργότερα παρεξηγήσεις, ότι η εμφάνιση της πτωτικής τάσης για την οποία μιλήσαμε προηγουμένως οφείλεται στην χαρακτηριστικά νεοκλασική παραδοχή περί κυρτότητας της μακροοικονομικής συνάρτησης παραγωγής $Y = F(K, L)$.

να δείξουμε αρχικά, δηλαδή ότι το εμβαδόν E μας δείχνει το απόλυτο μέγεθος της ελαστικότητας της καμπύλης ίσου προϊόντος: $E = \varepsilon_K / \varepsilon_L = \varepsilon_{LK}$ (βλ. 27΄).

Μολονότι δεν αποτελεί τίποτε άλλο παρά μια αναδιατύπωση της καμπύλης ίσου προϊόντος, η καμπύλη υποκατάστασης κατέχει μια ιδιαίτερη θέση στο πλαίσιο των θεωρητικών συζητήσεων για την ερμηνεία της διανομής του εισοδήματος. Και αυτό επειδή συνιστά τον κρίσιμο εκείνο κρίκο που θα συνδέσει τη νεοκλασική **θεωρία της παραγωγής** με τη νεοκλασική **θεωρία της διανομής** και, μέσω αυτής, και με τη νεοκλασική **θεωρία της οικονομικής μεγέθυνσης**. Αργότερα θα έχουμε την ευκαιρία να παρουσιάσουμε μια από τις βασικότερες θέσεις της νεοκλασικής θεωρίας, σύμφωνα με την οποία, υπό καθεστώς τέλειου ανταγωνισμού, η διανομή του εισοδήματος μεταξύ μισθών και κερδών εξαρτάται από το πόσο ελαστική ή ανελαστική είναι η καμπύλη υποκατάστασης μεταξύ των συντελεστών παραγωγής κεφάλαιο και εργασία. Για να διευκολυνθεί, αργότερα, η παρουσίαση της θέσης αυτής, αξίζει τον κόπο να κάνουμε από τώρα δύο προκαταρκτικές κινήσεις. Πρώτον, να ορίσουμε την **ελαστικότητα υποκατάστασης** μεταξύ των συντελεστών παραγωγής κεφάλαιο και εργασία. Και, δεύτερον, να δείξουμε γιατί η έννοια αυτή, που είναι καθοριστικής σημασίας για τη νεοκλασική ερμηνεία της διανομής, εκφράζει απλώς τον **βαθμό κυρτότητας** των καμπυλών ίσου προϊόντος και, για τον λόγο αυτό, αποτελεί μια καθαρά **τεχνική παράμετρο**, της οποίας το μέγεθος εξαρτάται από την μαθηματική μορφή που επιλέγουμε να δώσουμε στην μακροοικονομική συνάρτηση παραγωγής $Y = F(K, L)$.

Παρά το γεγονός ότι είναι μια κάπως ανορθόδοξη πρακτική, έχει εντούτοις επικρατήσει να ορίζεται η ελαστικότητα υποκατάστασης, που την συμβολίζουμε με το γράμμα σ, ως η **αρνητική** τιμή της ελαστικότητας της καμπύλης υποκατάστασης. Για την τελευταία ισχύει ο ίδιος ορισμός που ισχύει και στην περίπτωση των γνωστών μας καμπυλών ζήτησης του τύπου $p = p(x)$ [19]. Εφόσον η (σημειακή) ελαστικότητα μιας τέτοιας καμπύλης ορίζεται ως το πηλίκο της ποσοστιαίας μεταβολής της ζητούμενης ποσότητας x ($= dx/x$) και της ποσοστιαίας μεταβολής της τιμής p ($= dp/p$), η (σημειακή) ελαστικότητα της καμπύλης υποκατάστασης στο σχήμα 9.β θα ορίζεται, αντίστοιχα, ως το πηλίκο της ποσοστιαίας μεταβολής του λόγου κεφαλαίου-εργασίας k και του λόγου οριακής υποκατάστασης R:

$$\frac{dk/k}{dR/R} = \frac{R}{k}\frac{dk}{dR}.$$

Επειδή ισχύει γενικά (πράγμα που φαίνεται και στο σχήμα 9) ότι, για κάθε καμπύλη ίσου προϊόντος, η κλίση της αντίστοιχης καμπύλης υποκατάστασης είναι αρνητική ($dR/dk < 0$, άρα και $dk/dR < 0$), η ελαστικότητα της τελευταίας θα πρέπει, βάσει του

[19] Η αναλογία μεταξύ μιας καμπύλης ζήτησης $p = p(x)$ και της καμπύλης υποκατάστασης στο σχήμα 9.β δεν είναι καθόλου τυχαία. Η τελευταία αποτελεί και αυτή ένα είδος καμπύλης ζήτησης που εκφράζει, όπως θα δούμε αργότερα, την εξάρτηση της **σχετικής ζήτησης** συντελεστών παραγωγής από τις **σχετικές τιμές** τους.

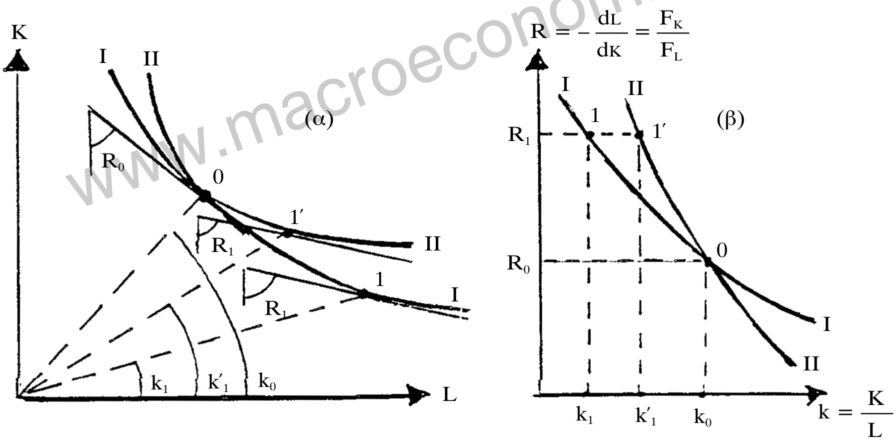
προηγούμενου ορισμού, να είναι πάντοτε ένας αρνητικός αριθμός, ο οποίος θα γίνεται όλο και πιο μικρός (ή, σε απόλυτους όρους, όλο και πιο μεγάλος) όσο μεγαλύτερη γίνεται η απόλυτη αριθμητική τιμή της κλίσης dk/dR. Τούτο σημαίνει ότι, όσο λιγότερο απότομη είναι η κλίση της καμπύλης υποκατάστασης σε σχέση με τον οριζόντιο άξονα, τόσο μεγαλύτερη, σε απόλυτους όρους, θα είναι και η ελαστικότητά της. Οι συνέπειες του συμπεράσματος αυτού για την ελαστικότητα υποκατάστασης σ είναι σχεδόν αυτονόητες. Επειδή αυτή ισούται με την αρνητική τιμή της ελαστικότητας της καμπύλης υποκατάστασης, θα ισχύει προφανώς ο ορισμός

$$\sigma = -\frac{dk/k}{dR/R} = -\frac{R}{k}\frac{dk}{dR}. \qquad (28)$$

Από το γεγονός ότι η καμπύλη υποκατάστασης έχει αρνητική κλίση ($dk/dR < 0$), προκύπτει από τον ορισμό 28 πως η ελαστικότητα υποκατάστασης σ θα είναι πάντοτε ένας **θετικός** αριθμός. Σε ό,τι αφορά την σχέση ανάμεσα στο μέγεθος της ελαστικότητας σ και στην κλίση της καμπύλης υποκατάστασης στο σχήμα 9.β προκύπτει επίσης από τον ορισμό 28 ότι, όσο **λιγότερο απότομη** ως προς τον οριζόντιο άξονα είναι η κλίση της καμπύλης υποκατάστασης, τόσο **μεγαλύτερη** θα είναι η αριθμητική τιμή της ελαστικότητας σ.

Την ίδια επιχειρηματολογία, που μας οδήγησε προηγουμένως από την καμπύλη ίσου προϊόντος (βλ. σχήμα 9.α) στην καμπύλη υποκατάστασης (βλ. σχήμα 9.β), μπορούμε να την χρησιμοποιήσουμε επίσης και για να δείξουμε γιατί η **ελαστικότητα υποκατάστασης** σ δεν είναι τίποτε άλλο παρά μια **τεχνική παράμετρος**, που εκφράζει τον **βαθμό κυρτότητας** της καμπύλης ίσου προϊόντος. Ο πιο απλός δρόμος για να φτάσουμε στην διαπίστωση αυτή είναι να σχεδιάσουμε, αρχικά, δύο καμπύλες ίσου προϊόντος με διαφορετικούς βαθμούς κυρτότητας, στη συνέχεια να κατασκευάσουμε τις δύο αντίστοιχες καμπύλες ίσου προϊόντος και, τελικά, να εξετάσουμε την σχέση που υπάρχει ανάμεσα στον διαφορετικό βαθμό κυρτότητας των δύο καμπυλών ίσου προϊόντος και στο διαφορετικό μέγεθος των ελαστικοτήτων υποκατάστασης σ.

Αρχίζουμε, λοιπόν, σχεδιάζοντας στο σχήμα 10.α δύο καμπύλες ίσου προϊόντος Ι και ΙΙ, όπου η καμπύλη ΙΙ είναι σαφώς πιο κυρτή από την καμπύλη Ι. Για να διευκολυνθούν οι συγκρίσεις των ποσοστιαίων μεταβολών που θα υποστούν σε λίγο οι κλίσεις των γωνιών που αντιστοιχούν στα μεγέθη $k\ (=K/L)$ και $R\ (=-dL/dK)$, υποθέτουμε ότι οι καμπύλες Ι και ΙΙ εφάπτονται στο σημείο 0. Αυτό το κοινό και στις δύο καμπύλες σημείο χαρακτηρίζεται από έναν λόγο κεφαλαίου-εργασίας K/L ίσο με k_0 και από έναν λόγο οριακής υποκατάστασης $-dL/dK$ ίσο με R_0. Τις δύο αυτές μετρήσεις τις μεταφέρουμε στους άξονες του σχήματος 10.β. Έτσι, εντοπίζουμε και στο σχήμα αυτό το σημείο 0 από το οποίο θα πρέπει να διέρχονται οι ακόμα απροσδιόριστες καμπύλες υποκατάστασης Ι και ΙΙ, που θα αντιστοιχούν στις δύο καμπύλες ίσου προϊόντος Ι και ΙΙ. Ξεκινώντας από το σημείο 0 στο σχήμα 10.α, ας κινηθούμε τώρα κατά μήκος της καμπύλης ίσου προϊόντος Ι, έως ότου φτάσουμε σε ένα οποιοδήποτε άλλο σημείο της, ας πούμε στο σημείο 1. Η διαφορά ανάμεσα στα σημεία 0 και 1 έγκειται στο γεγονός ότι *στο τελευταίο αντιστοιχεί ένας υψηλότερος λόγος οριακής υποκατάστασης* R ($R_1 > R_0$) και ένας χαμηλότερος λόγος κεφαλαίου-εργασίας k ($k_1 < k_0$). Μεταφέροντας τα μεγέθη αυτά στο σχήμα 10.β, εντοπίζουμε και εκεί το σημείο 1. Η γραμμή που διέρχεται από τα σημεία 0 και 1 του σχήματος 10.β είναι προφανώς η καμπύλη υποκατάστασης I, που αντιστοιχεί στην καμπύλη ίσου προϊόντος I στο σχήμα 10.α. Επανερχόμαστε τώρα στο σημείο 0 του σχήματος 10.α και επαναλαμβάνουμε την κίνηση που κάναμε προηγουμένως, αλλά τούτη τη φορά κατά μήκος της καμπύλης ίσου προϊόντος II και μάλιστα μέχρις ότου βρούμε το μοναδικό της εκείνο σημείο 1΄, του οποίου η εφαπτομένη θα έχει την ίδια κλίση R_1, που έχει και η εφαπτομένη στο σημείο 1 της καμπύλης ίσου προϊόντος I. Σε σύγκριση με το σημείο 0, το σημείο 1΄ χαρακτηρίζεται από



Σχήμα 10.

έναν λόγο κεφαλαίου-εργασίας ίσο με k'_1 ο οποίος είναι μεν μικρότερος του λόγου k_0 αλλά μεγαλύτερος του k_1 ($k_0 > k'_1 > k_1$). Τούτο οφείλεται προφανώς στο γεγονός ότι η καμπύλη ίσου προϊόντος I έχει σχεδιαστεί κατά τέτοιο τρόπο, ώστε στο σημείο Ο να είναι λιγότερο κυρτή από την καμπύλη ίσου προϊόντος II. Η μεταφορά των τιμών k'_1 και R_1 στους άξονες του σχήματος 10.β μας επιτρέπει να καταγράψουμε και στο σχήμα αυτό την θέση του σημείου 1΄. Η γραμμή που συνδέει το σημείο 1΄ και το σημείο 0 στο σχήμα 10.β είναι, βέβαια, η καμπύλη υποκατάστασης II, που αντιστοιχεί στην καμπύλη ίσου προϊόντος II.

Εάν συσχετίσουμε τώρα τον βαθμό κυρτότητας των καμπυλών ίσου προϊόντος I και II με την κλίση των καμπυλών υποκατάστασης I και II καταλήγουμε αβίαστα στο συμπέρασμα ότι, όσο λιγότερο κυρτή ως προς την αρχή των αξόνων είναι η καμπύλη ίσου προϊόντος, τόσο λιγότερο απότομη, ως προς τον οριζόντιο άξονα, θα είναι και η κλίση της αντίστοιχης καμπύλης υποκατάστασης. Έχοντας όμως ήδη διαπιστώσει ότι η καμπύλη υποκατάστασης με την λιγότερο απότομη κλίση είναι αυτή με την μεγαλύτερη ελαστικότητα υποκατάστασης σ, το προηγούμενο συμπέρασμα μπορεί να αναδιατυπωθεί και ως εξής: όσο **μικρότερος** είναι ο **βαθμός κυρτότητας** της καμπύλης ίσου προϊόντος, τόσο **μεγαλύτερη** θα είναι η **ελαστικότητα υποκατάστασης** σ. Άρα, αφού στο σημείο 0 του σχήματος 10.α η καμπύλη ίσου προϊόντος Ι είναι λιγότερο κυρτή από την καμπύλη ΙΙ, θα πρέπει να ισχύει ότι, στο σημείο αυτό, η ελαστικότητα υποκατάστασης σ_I είναι μεγαλύτερη από την ελαστικότητα υποκατάστασης σ_{II} $(\sigma_I > \sigma_{II})$. Τούτο μπορεί να επιβεβαιωθεί, αναλυτικά, και από την ποσοτική εκτίμηση των ελαστικοτήτων σ_I και σ_{II}. Το μέγεθός τους, στο σημείο 0 του σχήματος 10.α, μπορεί να υπολογιστεί με βάση τις ποσοστιαίες μεταβολές που υφίστανται οι γωνιακές κλίσεις k και R κατά την μετάβαση από το σημείο 0 στο σημείο 1 και από το σημείο 0 στο σημείο 1΄. Μετά την εισαγωγή στον ορισμό 28 των μεταβολών $dk = k_1 - k_0$, $dk' = k_1' - k_0$ και $dR = R_1 - R_0$ έχουμε για τις ελαστικότητες σ_I και σ_{II} τις ακόλουθες δύο εκφράσεις:

$$\sigma_I = -\frac{(k_1 - k_0)/k_0}{(R_1 - R_0)/R_0} \quad \text{και} \quad \sigma_{II} = -\frac{(k_1' - k_0)/k_0}{(R_1 - R_0)/R_0}.$$

Για να διευκολυνθεί η σύγκριση των μεγεθών σ_I και σ_{II} σχηματίζουμε το πηλίκο σ_I/σ_{II}, το οποίο, μετά την μετατροπή του σύνθετου κλάσματος σε απλό, μας δίνει την έκφραση

$$\frac{\sigma_I}{\sigma_{II}} = \frac{-(k_1 - k_0)}{-(k_1' - k_0)} = \frac{k_0 - k_1}{k_0 - k_1'}.$$

Επειδή όμως $k_0 > k_1' > k_1$ και συνεπώς επειδή $k_0 - k_1 > k_0 - k_1' > 0$ (βλ. επίσης σχήμα 10.α), προκύπτει από την έκφραση αυτή ότι $\sigma_I/\sigma_{II} > 1$, δηλαδή ότι $\sigma_I > \sigma_{II}$.

(δ) Η νεοκλασική μακροοικονομική συνάρτηση παραγωγής και η παραβολή περί ευπλασίας του κεφαλαίου

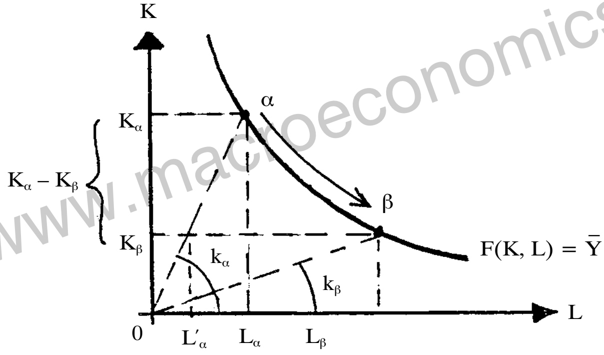
Στις σημειώσεις αυτές θα ήταν χρήσιμο να παρουσιαστεί, έστω και συνοπτικά, και μια άλλη αντίληψη για την μαθηματική μορφή της μακροοικονομικής συνάρτησης $Y = F(K, L)$ που συνδέεται με το όνομα του οικονομολόγου W. Leontief και η οποία διαφέρει σημαντικά από τη νεοκλασική. Πριν προχωρήσουμε στην παρουσίαση της αντίληψης αυτής και να γίνει πιο εύκολα κατανοητή η διαφορά της από τη νεοκλασική, αξίζει τον κόπο να επανέλθουμε για λίγο στις παρατηρήσεις, με τις οποίες συνοδεύσαμε προηγουμένως την παρουσίαση των δύο βασικών νεοκλασικών παραδοχών που θέλουν τη συνάρτηση $Y = F(K, L)$ να είναι διπλά παραγωγίσιμη και, ταυτόχρονα, και κυρτή.

Όπως θα θυμόμαστε, συνέπεια της πρώτης παραδοχής είναι ότι μας επιβάλλει να αποδεχθούμε ως ρεαλιστική την υπόθεση πως η μακροοικονομική συνάρτηση παραγωγής $Y = F(K, L)$ είναι **συνεχής** ως προς τις ανεξάρτητες μεταβλητές της K και L και πως το ίδιο ισχύει και για τις συναρτήσεις των οριακών προϊόντων των συντελεστών παραγωγής $F_K(K, L)$ και $F_L(K, L)$. Από τα σύντομα σχόλια που κάναμε στην §4.3.α.

διαφάνηκε ότι πίσω από αυτή την φαινομενικά ανώδυνη και μαθηματικά βολική υπόθεση κρύβεται μια αρκετά προβληματική άποψη για το τι ακριβώς εμπεριέχεται στην έννοια «διαθέσιμη τεχνολογία». Στις παρατηρήσεις που ακολουθούν θα περιοριστούμε στον σχολιασμό της σημασίας που έχει για τη νεοκλασική θεωρία της παραγωγής η συνέχεια της συνάρτησης $Y = F(K, L)$. Όμως εξίσου σημαντική είναι και η συνέχεια των συναρτήσεων $F_K(K, L)$ και $F_L(K, L)$, οι οποίες αποτελούν, στο πλαίσιο της νεοκλασικής θεωρίας της διανομής, τις συναρτήσεις ζήτησης των συντελεστών παραγωγής κεφάλαιο και εργασία. Σημειώνουμε απλώς ότι από τη συνέχεια των συναρτήσεων αυτών εξαρτάται και η υποτιθέμενη αυτορύθμιση της οικονομίας, δηλαδή η ικανότητά της να βρίσκεται πάντοτε σε κατάσταση ισορροπίας, αφομοιώνοντας ομαλά τις οποιεσδήποτε μεταβολές (ή διαταραχές) εμφανισθούν στις αγορές προϊόντων και στις αγορές συντελεστών παραγωγής κεφάλαιο και εργασία.

Όταν λέγεται ότι οι παραγωγικές δυνατότητες μιας οικονομίας περιγράφονται από μια συνεχή συνάρτηση παραγωγής $Y = F(K, L)$, αυτό που εννοείται πραγματικά είναι το εξής: στη διάθεση μιας οικονομίας βρίσκεται πάντοτε (δηλαδή ανεξάρτητα από την **τρέχουσα κατάστασή** της και από το **ιστορικό παρελθόν** της) μια τεχνολογία, η οποία προσφέρει – και μάλιστα δωρεάν και χωρίς όρους – μια τρομακτική σε δυνατότητες τεχνογνωσία. Μια τεχνογνωσία που θέτει στη διάθεση του επιχειρηματικού τομέα της οικονομίας ένα, **άπειρο σε εύρος**, φάσμα εναλλακτικών τρόπων συγκρότησης της παραγωγικής διαδικασίας, καθιστώντας ταυτόχρονα δυνατή, ανά πάσα χρονική στιγμή, την **στιγμιαία** και **χωρίς κόστος** αναδιάρθρωση της τελευταίας. Μια αναδιάρθρωση τέτοιας έκτασης, ώστε μια ορισμένη ποσότητα προϊόντος $\bar{Y}$, που σε μια δοσμένη χρονική στιγμή τυχαίνει να παράγεται μέσω ορισμένων ποσοτήτων φυσικού κεφαλαίου και εργασίας, να μπορεί να παραχθεί, την ίδια χρονική στιγμή, και με κάθε άλλο ποσοτικό συνδυασμό κεφαλαίου και εργασίας, που μπορεί να φαντασθεί κανείς. Τούτο ακριβώς είναι και το νόημα της συνεχούς και κυρτής καμπύλης ίσου προϊόντος $F(K, L) = \bar{Y}$, που απεικονίζεται στο σχήμα 11.

Ας εξετάσουμε όμως κάπως πιο προσεκτικά τα όσα περιγράφονται στο σχήμα 11. Εάν σε μια ορισμένη χρονική στιγμή το συνολικό προϊόν της οικονομίας ($Y = \bar{Y}$) τυχαίνει να παράγεται βάσει της τεχνικής α, τούτο σημαίνει ότι, την στιγμή αυτή, στους τόπους παραγωγής των διαφόρων επιχειρήσεων βρίσκονται εγκατεστημένες K_α μονάδες μέσων παραγωγής, τα οποία έχουν κατά τέτοιο τρόπο κατασκευασθεί, ώστε η λειτουργία τους να απαιτεί την απασχόληση ενός ορισμένου αιρθμού εργαζομένων ίσου με L_α. Η ιστορία που έχει να μας διηγηθεί η καμπύλη ίσου προϊόντος $F(K, L) = \bar{Y}$ στο σχήμα 11 είναι σίγουρα πολύ απλή αλλά ταυτόχρονα και τόσο υπερβολική στην απλουστευτικότητά της, ώστε να γίνεται δύσκολα πιστευτή. Αυτό που μας λέγεται είναι ότι, την στιγμή κατά την οποία το συνολικό προϊόν $\bar{Y}$ παράγεται με βάση την τεχνική α, την ίδια αυτή στιγμή, η οικονομία είναι σε θέση να αναδιαρθρώσει, με αστραπιαία ταχύτητα, το σύνολο των παραγωγικών της διαδικασιών και να συνεχίσει να παράγει, από την στιγμή αυτή και μετά, την ίδια ποσότητα συνολικού προϊόντος $\overline{Y}$, χρησιμοποιώντας μια από τις άπειρες άλλες εναλλακτικές τεχνικές που βρίσκονται πάντοτε στην διάθεσή της. Έτσι, η οικονομία μπορεί π.χ. να εγκαταλείψει την τεχνική α και να αρχίσει να λειτουργεί αμέσως με την τεχνική β, η οποία, σε σύγκριση με την τεχνική α, είναι χαμηλότερης έντασης κεφαλαίου, αφού απαιτεί την χρησιμοποίηση μιας μικρότερης ποσότητας κεφαλαίου ($K_\beta < K_\alpha$) και την απασχόληση ενός μεγαλύτερου αριθμού εργαζομένων ($L_\beta > L_\alpha$). Με την προσθήκη και κάποιων διευκρινίσεων που αναφέρονται στον φθίνοντα χαρακτήρα των οριακών προϊόντων των συντελεστών παραγωγής καθώς και στον φθίνοντα χαρακτήρα του λόγου της οριακής υποκατάστασής τους τελειώνει, σε χοντρές γραμμές, και η όλη η ιστορία που έχει να μας διηγηθεί η νεοκλασική,



Σχήμα 11.

μακροοικονομική συνάρτηση παραγωγής $Y = F(K, L)$ μέσα από το σχήμα 11. Στο σημείο αυτό μπορεί να έρθει στο νου μερικών να αναρωτηθούν, μήπως και η ιστορία αυτή δεν αποσκοπεί τελικά στην **περιγραφή** των παραγωγικών δυνατοτήτων μιας οικονομίας σε μιαν ορισμένη χρονική στιγμή, αλλά αποτελεί, σε τελευταία ανάλυση, μια **παραβολή** που θέλει να μας μιλήσει αλληγορικά για άλλα πράγματα. Μια παραβολή που ίσως να προσπαθεί, με πλάγιο τρόπο, χρησιμοποιώντας μαθηματικά σύμβολα, να μας πείσει για το πόσο φειδωλή αλλά και πόσο γενναιόδωρη είναι η φύση (ή, αν θέλετε, η θεϊκή πρόνοια) που έχει φροντίσει να ορίσει κατά τέτοιο ακριβοδίκαιο τρόπο τους «φυσικούς» νόμους της παραγωγής, ώστε να επιτυγχάνει ταυτόχρονα δύο σκοπούς. Από την μια μεριά, να δυσχεραίνει την ανάπτυξη της οικονομίας των ανθρωπίνων κοινωνιών, καθιστώντας όλο και πιο δύσκολη την συνεχή αύξηση της παραγωγικότητας και της υποκαταστασιμότητας των συντελεστών παραγωγής και, από την άλλη μεριά, να προικίζει απλόχερα τις κοινωνίες αυτές με ένα ανεξάντλητο απόθεμα τεχνικών γνώσεων, το οποίο τους επιτρέπει, εάν και όποτε θεωρούν ότι τις συμφέρει, να αλλάζουν, μέσα σε μια στιγμή, την παραγωγική τους δομή και να μεταβαίνουν ειρηνικά (ομαλά), χωρίς κλυδωνισμούς, τριβές και απώλειες, από την μια στην άλλη τεχνική. Όμως, παρά το ευφάνταστον της ιστορίας, στο νου μας παραμένουν αναπάντητα διάφορα πεζά ερωτήματα σχετικά με το τι ακριβώς συνεπάγεται αυτή η καταπληκτική προσαρμοστικότητα της οικονομίας καθώς και η εξίσου καταπληκτική ικανότητά της να κινείται ομαλά και με αστραπιαία ταχύτητα κατά μήκος της καμπύλης $F(K,L)=\overline{Y}$ στο σχήμα 11, μεταβαίνοντας, μέσα σε μια στιγμή, από την μια στην άλλη τεχνική, π.χ. από την «παλαιά» τεχνική α στη «νέα» τεχνική β.

Πρώτο ερώτημα: τι συμβαίνει άραγε με το απόθεμα μέσων παραγωγής $K_\alpha - K_\beta$, το οποίο, με την νέα τεχνική β, δεν χρησιμοποιείται πια στην παραγωγή του συνολικού προϊόντος $\overline{Y}$; Η απάντηση της νεοκλασικής παραβολής είναι ότι το **πλεονάζον** απόθεμα μέσων παραγωγής $K_\alpha - K_\beta$ **αποσύρεται** από τους τόπους παραγωγής και μάλιστα **χωρίς κόστος** για τις επιχειρήσεις διότι, διαφορετικά, δεν είναι καθόλου σίγουρο, εάν τελικά αξίζει για αυτές να αντικατασταθεί η τεχνική α από την τεχνική β.

Δεύτερο ερώτημα: και πού πηγαίνει το πλεονάζον απόθεμα μέσων παραγωγής $K_\alpha - K_\beta$ μετά, αφού πια αποσυρθεί από τους τόπους παραγωγής; Αν και με το ερώτημα αυτό θα ασχοληθούμε αργότερα, όταν θα παρουσιάσουμε την μακροοικονομική εκδοχή του οικονομικού κυκλώματος, μπορούμε να πούμε προκαταβολικά ότι η απάντηση της νεοκλασικής παραβολής έχει περίπου ως εξής. Το πλεονάζον απόθεμα φυσικού κεφαλαίου $K_\alpha - K_\beta$ δεν μπορεί προφανώς να πεταχθεί στον κάλαθο των κοινωνικά αχρήστων. Τούτο θα συνεπαγόταν ένα μεγάλο κοινωνικό κόστος με αποτέλεσμα η οικονομία να βρεθεί σε μια κατάσταση αναποτελεσματικής χρησιμοποίησης των οικονομικών της πόρων, μια κατάσταση που θα πρέπει να αποκλεισθεί ως μη επιθυμητή, σύμφωνα με το νεοκλασικό κριτήριο Pareto. Αν είναι, λοιπόν, να του δοθεί και πάλι μια κοινωνικά χρήσιμη μορφή, το μόνο που απομένει στη νεοκλασική παραβολή είναι να υποθέσει ότι το ανενεργό απόθεμα κεφαλαίου $K_\alpha - K_\beta$, αλλά και το κεφάλαιο εν γένει, διαθέτει από την φύση του **ενός είδους ευπλασία**, η οποία του επιτρέπει, εάν χρειαστεί, να μετατρέπεται αυτόματα (και πάλι χωρίς κόστος και μέσα σε μια στιγμή) από αντικείμενα που έχουν κατασκευασθεί για να χρησιμεύσουν ως μέσα παραγωγής σε αντικείμενα ιδιωτικής χρήσης, δηλαδή σε καταναλωτικά αγαθά.

Και ένα τρίτο ερώτημα: τι συμβαίνει άραγε και με το υπόλοιπο τμήμα του αρχικού αποθέματος κεφαλαίου K_α στο σχήμα 11, δηλαδή με το απόθεμα κεφαλαίου K_β, το οποίο, μετά την μετάβαση της οικονομίας από την τεχνική α στην τεχνική β, εξακολουθεί να παραμένει στα εργοτάξια των επιχειρήσεων και να συνεχίζει να χρησιμοποιείται στην παραγωγή του συνολικού προϊόντος $\overline{Y}$; Είναι προφανές ότι, όντας τμήμα του αρχικού αποθέματος K_α, το απόθεμα κεφαλαίου K_β θα πρέπει να έχει κατασκευασθεί με προδιαγραφές που αντιστοιχούν στις απαιτήσεις μιας τεχνικής (της τεχνικής α) που χαρακτηρίζεται από έναν σχετικά υψηλό βαθμό εκμηχάνισης της παραγωγής, δηλαδή από μια σχετικά υψηλή ένταση κεφαλαίου k_α (χαμηλή ένταση εργασίας). Όμως, αμέσως μετά την αντικατάσταση της τεχνικής α από την τεχνική β, βλέπουμε το ίδιο απόθεμα μέσων παραγωγής K_β να χρησιμοποιείται στο πλαίσιο μιας τεχνικής που είναι σαφώς χαμηλότερης έντασης κεφαλαίου σε σύγκριση με την αρχική ($k_β < k_α$). Πώς δικαιολογείται το φαινόμενο αυτό το οποίο θα χαρακτήριζε κανείς, επιεικώς, ως παράδοξο; Πρόκειται για ένα ερώτημα που το συζητήσαμε και προηγουμένως στην §4.3.α. Το συμπέρασμά μας ήταν, ότι το ερώτημα αυτό δεν μπορεί να απαντηθεί στο πλαίσιο της νεοκλασικής παραβολής παρά μόνον εάν υποτεθεί ότι το απόθεμα μέσων παραγωγής $K_β$ (και όχι μόνον αυτό, αλλά και κάθε απόθεμα μέσων παραγωγής) διαθέτει, από την φύση του, και ενός **δεύτερου είδους ευπλασία**, πέραν εκείνης για την οποία μιλήσαμε πριν από λίγο. Μια ευπλασία που θα επιτρέπει π.χ. στο απόθεμα κεφαλαίου $K_β$ να αλλάζει, χωρίς κανένα κόστος και στιγμιαία, τα τεχνικά του χαρακτηριστικά και τις προδιαγραφές του και να μετατρέπεται αυτόματα, από μέσα παραγωγής που απαιτούν την απασχόληση ενός σχετικά μικρού αριθμού εργαζομένων ($L'_α$ στο σχήμα 11) σε μέσα παραγωγής τα οποία θα έχουν μεν το ίδιο (!,;) μέγεθος $K_β$ που είχαν και αρχικά αλλά θα είναι, ταυτόχρονα, και διαφορετικά με την έννοια ότι τώρα θα απαιτούν την απασχόληση ενός σχετικά μεγάλου αριθμού εργαζομένων ($L_β > L'_α$).

Αν ήταν κανείς αρκετά κυνικός ή κακεντρεχής, θα μπορούσε ίσως να ισχυρισθεί ότι όλη αυτή η νεοκλασική ιστορία για τις φανταστικές ιδιότητες της μακροοικονομικής συνάρτησης παραγωγής $Y = F(K, L)$ καθώς και τα όσα άλλα μπορεί κανείς να διηγηθεί, ξεκινώντας από την ιστορία αυτή (ευελιξία και αυτόματη εξισορρόπηση των αγορών στην βραχυχρόνια και στην μακροχρόνια περίοδο, ισόρροπη οικονομική μεγέθυνση, διαχρονική μεγιστοποίηση της κοινωνικής ευημερίας, κλπ.) αποτελούν, τελικά, πολύ μεγάλα παραμύθια για πολύ μικρά παιδιά. Την κυνική του αυτή ρήση θα μπορούσε να την υποστηρίξει παραπέμποντας στο γεγονός, ότι η εσωτερική συνοχή και η πειστικότητα όλων αυτών των μακροοικονομικών ιστοριών φαίνεται να εξαρτάται από την διάθεση του καθενός να πιστέψει ή να μην πιστέψει τα διδάγματα που απορρέουν από την «**παραβολή περί ευπλασίας του κεφαλαίου**». Μια παραβολή η οποία, σύμφωνα με τις παρατηρήσεις που έγιναν προηγουμένως, διατείνεται ότι αυτό που ονομάζεται κεφάλαιο σε μια καπιταλιστική κοινωνία δεν είναι τίποτε άλλο παρά κάτι που μοιάζει με στόκο ή πλαστελίνη, κάτι που μπορεί να μετατραπεί αμέσως και χωρίς κόστος, από μέσα παραγωγής ορισμένου είδους (π.χ. τόρνοι), σε αντικείμενα καταναλωτικής υφής (π.χ. σε ψωμί) ή σε μέσα παραγωγής διαφορετικού είδους (π.χ. σε αλέτρια) ή, ακόμα, και στα δύο (π.χ. εν μέρει σε ψωμί και εν μέρει σε αλέτρια).

Αξίζει τον κόπο να επισημανθεί τελικά ότι με την παραβολή περί ευπλασίας του κεφαλαίου «λύνεται» αυτόματα και το **πρόβλημα της ετερογένειας** του συνολικού αποθέματος κεφαλαίου K και του συνολικού προϊόντος Y, ένα πρόβλημα στο οποίο αναφερθήκαμε προηγουμένως στην §4.2., όταν μιλήσαμε για την νεορικαρδιανή κριτική (SRAFFA, PASINETTI) στη νεοκλασική μακροοικονομική (αθροιστική) συνάρτηση παραγωγής $Y = F(K, L)$. Επειδή εδώ έχουμε να κάνουμε με ένα μονοτομεακό υπόδειγμα της παραγωγής, θα πρέπει να φαντασθούμε ότι το συνολικό προϊόν Y είναι ένα πράγμα ομογενές και εύπλαστο, το οποίο, μετά την παραγωγή του, μπορεί να μετατραπεί σε καταναλωτικά αγαθά ή σε νέα μέσα παραγωγής (επενδυτικά αγαθά): $Y = C + I$, όπου C και I οι ποσότητες καταναλωτικών και επενδυτικών αγαθών (σε **φυσικούς όρους**), στις οποίες μετατρέπεται το συνολικό προϊόν Y. Το γεγονός όμως ότι το τμήμα εκείνο του συνολικού προϊόντος, το οποίο παίρνει την μορφή νέων μέσων παραγωγής, έρχεται και προστίθεται, σε φυσικούς όρους, στο αρχικό απόθεμα μέσων παραγωγής K, μας επιβάλλει να φαντασθούμε επίσης ότι το συνολικό προϊόν Y θα πρέπει να έχει κατασκευασθεί με το ίδιο ομογενές και εύπλαστο υλικό με το οποίο έχει κατασκευασθεί και το αρχικό απόθεμα κεφαλαίου K. Αφού, λοιπόν, το συνολικό προϊόν Y και το συνολικό απόθεμα κεφαλαίου K στην μακροοικονομική συνάρτηση παραγωγής $Y = F(K, L)$ είναι φτιαγμένα με το ίδιο ομογενές και εύπλαστο υλικό, είναι προφανές ότι έχει εξαφανισθεί, εξ ορισμού, και το πρόβλημα της «άθροισης» ετερογενών μεγεθών.

(ε) Συναρτήσεις παραγωγής τύπου Leontief (συναρτήσεις παραγωγής με σταθερούς συντελεστές εισροών-εκροών)

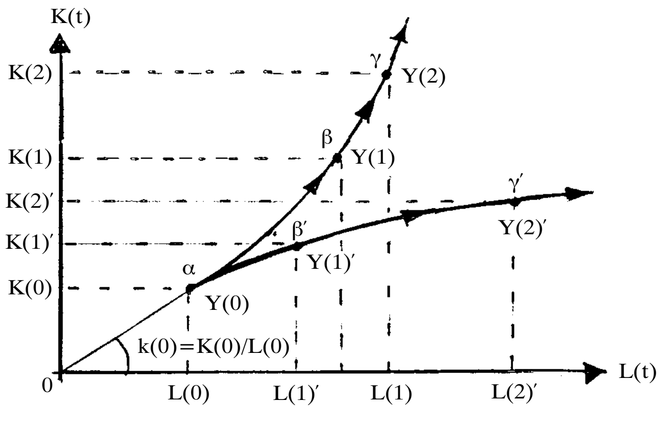
Από τις διάφορες παρατηρήσεις που έγιναν προηγουμένως θα πρέπει να έχει γίνει σαφής η σημασία που κατέχει η παραβολή περί ευπλασίας του κεφαλαίου στο πλαίσιο της νεοκλασικής εκδοχής της μακροοικονομικής συνάρτησης παραγωγής $Y = F(K, L)$. Η παραβολή αυτή, με το να αφαιρεί από την έννοια της παραγωγής την **χρονική** της διάσταση και να αποσυνδέει το θέμα της αναδιάρθρωσης της παραγωγικής διαδικασίας από την **επενδυτική** πολιτική των επιχειρήσεων, επιτρέπει να προικισθεί η μακροοικονομική συνάρτηση παραγωγής $Y = F(K, L)$ με την ιδιότητα της διπλής παραγωγισιμότητας (και συνεπώς και της συνέχειας) – γεγονός που, σε οικονομικούς όρους, σημαίνει ότι της επιτρέπει να προικισθεί με την φανταστική ιδιότητα της στιγμιαίας, απεριόριστης και χωρίς κόστος υποκατάστασης του συντελεστή παραγωγής «κεφάλαιο» από τον συντελεστή παραγωγής «εργασία» ή και αντίστροφα.

Με αφετηρία τις συναρτήσεις παραγωγής τύπου Leontief που χρησιμοποιούνται στην θεωρία των γραμμικών συστημάτων παραγωγής (υποδείγματα εισροών-εκροών) θα παρουσιάσουμε τώρα μιαν άποψη για την μαθηματική μορφή της μακροοικονομικής συνάρτησης παραγωγής $Y = F(K, L)$, που είναι διαμετρικά διαφορετική από την νεοκλασική. Μια άποψη η οποία, σε σύγκριση με την νεοκλασική, ανταποκρίνεται καλύτερα στην πραγματικότητα μιας καπιταλιστικής οικονομίας, τουλάχιστον κατά την γνώμη των υποστηρικτών της, που είναι συνήθως οικονομολόγοι που έλκονται από την παράδοση της μαρξικής και της κεϋνσιανής θεωρίας. Σε αντίθεση προς την νεοκλασική, η άποψη με την οποία θα ασχοληθούμε στις επόμενες σελίδες, απορρίπτει την παραβολή περί ευπλασίας του κεφαλαίου, δίνοντας ιδιαίτερη έμφαση στον **πάγιο** χαρακτήρα της πλειονότητας των αντικειμένων που χρησιμοποιούνται ως μέσα παραγωγής. Ιδιαίτερη έμφαση δίνει επίσης και στην **χρονική διάσταση** της παραγωγής, τονίζοντας ότι η αναδιάρθρωση της παραγωγικής διαδικασίας και η υποκατάσταση των συντελεστών παραγωγής δεν είναι στιγμιαία συμβάντα. Αντίθετα, αποτελούν διαδικασίες που εκτυλίσσονται σταδιακά, στην διάρκεια του χρόνου, και οι οποίες ούτε ανέξοδες ούτε χωρίς όρια είναι, αφού η ταχύτητά τους και τα περιθώριά τους εξαρτώνται από τους παράγοντες που καθορίζουν την διαχρονική **επενδυτική** στρατηγική των επιχειρήσεων.

Στρέφοντας τώρα την σκέψη μας από την έννοια του εύπλαστου κεφαλαίου προς την έννοια του παγίου κεφαλαίου, αρχίζουμε με την ακόλουθη αυτονόητη διαπίστωση. Επειδή οι ποσότητες και οι τεχνικές ιδιότητες των κάθε είδους μέσων παραγωγής που βρίσκονται, την στιγμή $t=0$ (το **παρόν**), στην κατοχή των επιχειρήσεων έχουν καθορισθεί από αποφάσεις που έχουν ληφθεί στο **παρελθόν** (δηλαδή στις στιγμές –1, –2, –3, κλπ.), το μέγεθος και η αποδοτικότητα του συνολικά διαθέσιμου αποθέματος κεφαλαίου την στιγμή 0 – δηλαδή το μέγεθος και η αποδοτικότητα του αποθέματος κεφαλαίου K(0) – αποτελούν, ουσιαστικά, **σταθερές** που είναι αδύνατον να μεταβληθούν, σε σημαντικό βαθμό, στην παρούσα στιγμή 0. Η οποιαδήποτε **μεταβολή** τους δεν μπορεί να είναι στιγμιαία, αφού αυτή μεσολαβείται αναγκαστικά από τις **επενδυτικές αποφάσεις** που παίρνονται την στιγμή 0 και από τις αντίστοιχες αποφάσεις που θα παρθούν στις επόμενες χρονικές στιγμές 1, 2, 3 κλπ. Όλες αυτές οι αποφάσεις θα έχουν ως αποτέλεσμα να σχηματισθούν στο **μέλλον** (δηλαδή στις στιγμές 1, 2, 3 κλπ.) αποθέματα κεφαλαίου K(1), K(2), K(3) κλπ., τα οποία θα είναι, κατά πάσα πιθανότητα, διαφορετικού μεγέθους και διαφορετικής αποδοτικότητας σε σύγκριση με το σημερινό απόθεμα κεφαλαίου K(0).

Το γεγονός, ότι το μέγεθος και η αποδοτικότητα του σημερινού αποθέματος κεφαλαίου K(0) έχουν ήδη προκαθορισθεί από τις επενδύσεις του παρελθόντος, σημαίνει όμως ότι οι επενδύσεις αυτές θα έχουν επίσης προκαθορίσει (μέσω των οικονομικών και τεχνικών προδιαγραφών, βάσει των οποίων κατασκευάσθηκαν στο παρελθόν τα διάφορα μέσα παραγωγής, που συνιστούν το σημερινό απόθεμα κεφαλαίου K(0)) τόσο το **μέγιστο προϊόν** Y(0) που είναι δυνατό να παραχθεί, την στιγμή 0, μέσω του αποθέματος K(0), όσο και το **εργατικό δυναμικό** L(0) που απαιτείται για την **πλήρη αξιοποίηση** (100%) του αποθέματος K(0). Συνεπώς, την στιγμή 0, η διαθέσιμη τεχνολογία δεν μπορεί να περιλαμβάνει παρά **μία** και μόνο **τεχνική** που θα είναι αυτή που έχει αποκρυσταλλωθεί στο συσσωρευμένο από το παρελθόν απόθεμα μέσων παραγωγής K(0). Σε ό,τι αφορά το παρόν, δηλαδή την στιγμή 0, δεν τίθεται θέμα **επιλογής** ενός άλλου ποσοτικού συνδυασμού των μεταβλητών K, L και Y εκτός του ιστορικά καθορισμένου συνδυασμού K(0), L(0) και του μέγιστου προϊόντος Y(0) που είναι δυνατόν να παραχθεί μέσω των δοσμένων μεγεθών K(0) και L(0). Μπορεί βέβαια να σκεφθεί κανείς ότι για κάποιους λόγους (π.χ. λόγω ανεπαρκούς ζήτησης) οι επιχειρήσεις αναγκάζονται εκ των πραγμάτων, την στιγμή 0, να «επιλέξουν» την παραγωγή μιας ποσότητας προϊόντος Y΄(0), μικρότερης του δυνητικού προϊόντος Y(0), με επακόλουθο να μην χρησιμοποιηθεί για την παραγωγή του Y΄(0) το συνολικά διαθέσιμο απόθεμα κεφαλαίου K(0) αλλά μόνον ένα τμήμα του, ας πούμε το τμήμα K΄(0). Το γεγονός ότι τώρα το υπάρχον απόθεμα K(0) αξιοποιείται κατά ένα ποσοστό μικρότερο του 100% – και συγκεκριμένα, κατά το ποσοστό $(K(0)-K'(0))/K(0)$ – σημαίνει πως και η απασχόληση εργατικού δυναμικού θα διαμορφωθεί σε ένα επίπεδο L΄(0) που θα είναι χαμηλότερο του L(0). Παραπέμποντας στον συνδυασμό L΄(0), K΄(0) και Y΄(0), θα μπορούσε κανείς να ισχυρισθεί ότι εδώ «επιλέγεται» από τις επιχειρήσεις η εφαρμογή μιας τεχνικής που είναι διαφορετική από την τεχνική που θα μπορούσε δυνητικά να είχε εφαρμοσθεί, καταλήγοντας έτσι στο συμπέρασμα πως η διαθέσιμη τεχνολογία περιλαμβάνει, όχι μία, αλλά περισσότερες τεχνικές. Όμως, όπως θα δούμε λεπτομερέστερα σε λίγο, εδώ δεν πρόκειται για την εφαρμογή μιας νέας τεχνικής αλλά για την **αναποτελεσματική χρησιμοποίηση** της μόνης διαθέσιμης τεχνικής, που είναι αυτή που χαρακτηρίζεται από τον ποσοτικό συνδυασμό L(0), K(0) και Y(0).

Την τεχνική αυτή, που η οικονομία την έχει κληρονομήσει από το ιστορικό της παρελθόν και την οποία είναι εκ των πραγμάτων αναγκασμένη να την χρησιμοποιήσει την στιγμή 0 (παρόν), μπορούμε να την παρουσιάσουμε και διαγραμματικά με την βοήθεια των σχημάτων, στα οποία σχεδιάζαμε προηγουμένως την νεοκλασική καμπύλη ίσου προϊόντος $F(K,L)=\overline{Y}$ (βλ. π.χ. σχήμα 11). Όμως τώρα δεν τίθεται θέμα επιλογής ενός σημείου πάνω σε μια συνεχή καμπύλη ίσου προϊόντος, αφού η μόνη τεχνική που βρίσκεται στην διάθεση της οικονομίας, την στιγμή 0, θα καταγράφεται στον χώρο L-K από ένα και μοναδικό σημείο. Στην περίπτωση του δοσμένου συνδυασμού L(0), K(0) και Y(0), αυτή η μοναδική τεχνική, που χαρακτηρίζεται από μια ένταση κεφαλαίου k(0) ίση με $K(0)/L(0)$, θα καταγράφεται στο σχήμα 12 από το σημείο α. Σε λίγο θα δούμε ότι και για την περίπτωση αυτή μπορεί να ορισθεί μια καμπύλη ίσου προϊόντος στον χώρο L-K, η οποία, όμως, δεν θα είναι συνεχής και δεν θα έχει τις ιδιότητες που απαιτεί, από μια τέτοια καμπύλη, η νεοκλασική λογική.



Σχήμα 12.

Το γεγονός, ότι την στιγμή 0 η οικονομία δεν έχει άλλη επιλογή παρά να χρησιμοποιήσει την τεχνική α που απεικονίζεται στο σχήμα 12, δεν σημαίνει βέβαια ότι την στιγμή 0 η οικονομία δεν αντιμετωπίζει πρόβλημα **επιλογής τεχνικών**. Όμως, το αντικείμενο της επιλογής αυτής δεν είναι η σημερινή διάρθρωση της παραγωγικής διαδικασίας αλλά η μελλοντική. Αυτό που επιλέγεται την στιγμή 0 είναι η μορφή της τεχνολογίας του μέλλοντος, αφού η πορεία του χρόνου δεν είναι αντιστρέψιμη και αφού ο κάθε λόγος για την τεχνολογία του παρόντος και του παρελθόντος ανήκει πια οριστικά στην ιστορία. Αυτό που επιλέγεται την στιγμή 0 είναι το μέγεθος και το είδος των επενδύσεων I(0), οι οποίες, μαζί με τις επενδύσεις που σχεδιάζονται να γίνουν στο μέλλον (I(1), I(2), I(3), ...) θα καθορίσουν το μέγεθος και την αποδοτικότητα των μελλοντικών αποθεμάτων κεφαλαίου K(1), K(2), K(3), ..., καθορίζοντας έτσι και την μορφή της τεχνολογίας του μέλλοντος, δηλαδή τις συγκεκριμένες τεχνικές που θα χρησιμοποιηθούν στις μελλοντικές στιγμές 1, 2, 3, ... Με την επιλογή, από την πλευρά των επιχειρήσεων, μιας ορισμένης διαχρονικής επενδυτικής στρατηγικής I(0), I(1), I(2), ... επιλέγονται όχι μόνον τα μελλοντικά αποθέματα κεφαλαίου K(1), K(2), K(3), ... αλλά, μαζί με αυτά, και τα επίπεδα της μελλοντικής δυνητικής παραγωγής Y(1), Y(2), Y(3), ... καθώς επίσης και τα μεγέθη της μελλοντικής δυνητικής απασχόλησης εργατικού δυναμικού L(1), L(2), L(3), ... Μια ορισμένη επενδυτική στρατηγική μπορεί π.χ. να έχει ως συνέπεια (βλ. γραμμή αβγ στο σχήμα 12) την διαχρονική εφαρμογή τεχνικών, που θα χαρακτηρίζονται από μια όλο και πιο υψηλή ένταση κεφαλαίου k $(=K/L)$, ενώ μια άλλη επενδυτική στρατηγική (βλ. γραμμή αβ΄γ΄ στο σχήμα 12) μπορεί να οδηγήσει σε μια συνεχή μείωση του βαθμού εκμηχάνισης της παραγωγής, δηλαδή στην εφαρμογή τεχνικών, οι οποίες, με την πάροδο του χρόνου t, θα εμφανίζουν μια όλο και πιο χαμηλή ένταση κεφαλαίου k.

Μία και αναφερθήκαμε στην έννοια της καμπύλης ίσου προϊόντος, αξίζει τον κόπο να πούμε και δυο λόγια για την γεωμετρική μορφή που θα έχει η καμπύλη αυτή στην περίπτωση της μοναδικής τεχνικής, βάσει της οποίας συγκροτείται η παραγωγή διαδικασία σε μια ορισμένη χρονική στιγμή. Την τεχνική αυτή, η οποία, όντας κληρονομιά του παρελθόντος, εμφανίζεται ενσωματωμένη στα τεχνικά χαρακτηριστικά του υπάρχοντος αποθέματος κεφαλαίου, μπορούμε να την περιγράψουμε με την βοήθεια δύο παραμέτρων που χρησιμοποιούνται συχνά στην βιβλιογραφία προκειμένου να καταγραφεί ποσοτικά η σχέση μεταξύ **εισροών** στην παραγωγική διαδικασία (κεφάλαιο και εργασία) και **εκροών** (τελικό προϊόν). Η πρώτη παράμετρος εκφράζει την ποσότητα του χρησιμοποιούμενου κεφαλαίου K, που αντιστοιχεί στην παραγωγή μιας μονάδας προϊόντος Y, ενώ η δεύτερη παράμετρος εκφράζει το μέγεθος της απασχόλησης L, που είναι αναγκαία προκειμένου να παραχθεί, βάσει της δοσμένης τεχνικής, μια μονάδα προϊόντος Y[20] Οι δύο αυτές παράμετροι – κεφάλαιο ανά μονάδα προϊόντος (K/Y) και εργασία ανά μονάδα προϊόντος (L/Y) – που χαρακτηρίζουν την τεχνική διάρθρωση της παραγωγής σε μια ορισμένη χρονική στιγμή, είναι οι αναλογίες εκείνες, οι οποίες, στην θεω-

[20] Επειδή στις επόμενες σελίδες θα αναφερόμαστε πάντοτε σε μια δοσμένη χρονική στιγμή, θα αφαιρέσουμε από τον συμβολισμό των διαφόρων μεγεθών την συναρτησιακή τους εξάρτηση από τον χρόνο t και, αντί να γράφουμε π.χ. $Y(t)$ ή $K(t)$, θα γράφουμε απλώς Y ή K.

ρία των γραμμικών συστημάτων παραγωγής, ονομάζονται **συντελεστές εισροών-εκροών** και συμβολίζονται, πολλές φορές, με τα ψηφία ν και u:

$$v = K/Y \text{ και } u = L/Y.$$

Ας σημειωθεί ότι ο συντελεστής εργασίας $u = L/Y$ είναι η αντίστροφος της μέσης παραγωγικότητας της εργασίας y ($= Y/L$) καθώς επίσης και ότι ο συντελεστής κεφαλαίου $v = K/Y$ είναι η αντίστροφος της μέσης αποδοτικότητας (ή παραγωγικότητας) του κεφαλαίου Y/K. Στον βαθμό που είναι γνωστό το μέγεθος των συντελεστών εισροών-εκροών ν και u, είναι πολύ εύκολο να υπολογισθεί και ο χαρακτηριστικός για την χρησιμοποιούμενη τεχνική λόγος κεφαλαίου-εργασίας $k = K/L$ (ένταση κεφαλαίου). Διαιρώντας τον αριθμητή και τον παρονομαστή του κλάσματος K/L με Y και λαμβάνοντας υπόψη τον ορισμό των ν και u, προκύπτει ότι η ένταση κεφαλαίου k ισούται με το πηλίκο των συντελεστών εισροών-εκροών ν και u:

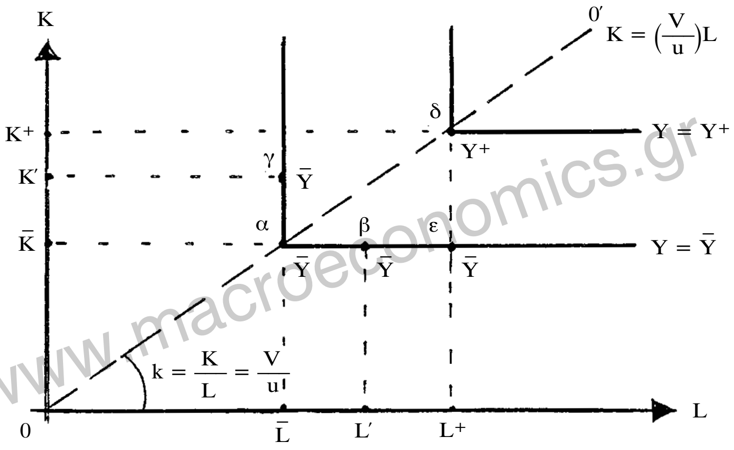
$$k = \frac{K}{L} = \frac{K/Y}{L/Y} = \frac{v}{u}.$$

Από την έκφραση αυτή προκύπτει επίσης και η σχέση

$$K = \left(\frac{v}{u}\right)L,$$

η οποία θα απεικονίζεται στον χώρο L-K (βλ. σχήμα 13) από μια ευθεία γραμμή που θα διέρχεται από την αρχή των αξόνων και της οποίας η κλίση, σε σχέση με τον οριζόντιο άξονα L, θα ισούται με την ένταση κεφαλαίου $k = v/u$ (βλ. την ευθεία γραμμή ΟΟ΄ στο σχήμα 13).

Ποιες είναι οι πληροφορίες που μπορούμε να αποσπάσουμε από την ευθεία γραμμή $K = (v/u)L$ στο σχήμα 13, εάν γνωρίζουμε την ένταση κεφαλαίου $k = v/u$ της δοσμένης τεχνικής; Στον βαθμό που μας δίνεται το μέγεθος του αποθέματος κεφαλαίου K στον κάθετο άξονα του σχήματος 13, μπορούμε να εντοπίσουμε στην ευθεία ΟΟ΄ το σημείο εκείνο που αντιστοιχεί στη δοσμένη τιμή του K και να βρούμε αμέσως, στον οριζόντιο άξονα, το αντίστοιχο μέγεθος της απασχόλησης εργατικού δυναμικού L ($L = (u/v)K$). Από την άλλη μεριά, δίπλα στο σημείο της ευθείας ΟΟ΄, το οποίο καθορίζεται από το δοσμένο απόθεμα κεφαλαίου K, μπορούμε να καταχωρήσουμε επίσης και το μέγεθος του μέγιστου προϊόντος Y, που μπορεί να παραχθεί με βάση το δοσμένο απόθεμα κεφαλαίου K. Το μέγεθος αυτό της μεταβλητής Y, που αντιστοιχεί σε μια δοσμένη τιμή της μεταβλητής K, το υπολογίζουμε χρησιμοποιώντας τον ορισμό του συντελεστή κεφαλαίου ν ($= K/Y$) : $Y = (1/v)K$. Για να γίνουμε πιο σαφείς, ας υποθέσουμε ότι το απόθεμα κεφαλαίου που έχει κληρονομηθεί από το παρελθόν ισούται με $\bar{K}$ (βλ. την αντίστοιχη εγγραφή στον κάθετο άξονα του σχήματος 13). Η ποσότητα εργατικού δυναμικού $\bar{L}$ που απαιτείται προκειμένου να αξιοποιηθεί πλήρως (100%) το δοσμένο απόθεμα κεφαλαίου $\bar{K}$ (βλ. το σημείο α και την αντίστοιχη εγγραφή στον οριζόντιο άξονα) θα ισούται με: $\bar{L} = (u/v)\bar{K}$. Τελικά, για την μέγιστη ποσότητα προϊόντος $\bar{Y}$ που μπορεί να παραχθεί βάσει του δοσμένου αποθέματος κεφαλαίου $\bar{K}$ θα ισχύει: $\bar{Y} = \bar{K}/v$. Το γεγονός αυτό το καταγράφουμε στο σχήμα 13, καταχωρώντας δίπλα στο σημείο α και την τιμή $Y = \bar{Y}\ (= \bar{K}/v)$.



Σχήμα 13.

Βέβαια, θα μπορούσε κανείς να φαντασθεί ότι το δοσμένο απόθεμα κεφαλαίου $\bar{K}$ είναι δυνατό να συνδυασθεί και με μια ποσότητα εργασίας L' που θα είναι μεγαλύτερη από την αναγκαία $\bar{L}$ (βλ. σημείο β στο σχήμα 13). Όμως, στην περίπτωση αυτή η πρόσθετη απασχόληση εργατικού δυναμικού κατά το ποσό $L' - \bar{L}$ είναι σαφώς περιττή, αφού το μέγιστο προϊόν που μπορεί να παραχθεί περιορίζεται από το δοσμένο μέγεθος του αποθέματος κεφαλαίου $\bar{K}$, εξακολουθώντας να παραμένει στο επίπεδο $\bar{Y} = \bar{K}/v$, παρά την αύξηση της απασχόλησης από $\bar{L}$ σε L'. Είναι προφανές ότι το ίδιο ισχύει και για οποιαδήποτε τιμή της L μεγαλύτερης της $\bar{L}$. Άρα, όλα τα σημεία της παράλληλης προς τον οριζόντιο άξονα ευθείας, που αρχίζει από το σημείο α και κατευθύνεται προς τα δεξιά, καταγράφουν και αυτά, όπως το σημείο α, διάφορους συνδυασμούς των K και L (δηλαδή διάφορες τεχνικές), μέσω των οποίων είναι επίσης δυνατό να παραχθεί η ποσότητα προϊόντος $\bar{Y}$. Με τη μόνη διαφορά ότι όλα αυτά τα σημεία αντιστοιχούν σε τεχνικές, οι οποίες, συγκρινόμενες με αυτήν του σημείου α, είναι μη αποδοτικές. Βάσει της ίδιας συλλογιστικής συμπεραίνουμε επίσης ότι, στο βαθμό που η απασχόληση παραμένει στο επίπεδο $\bar{L}$, η οποιαδήποτε αύξηση του αποθέματος κεφαλαίου πέραν του ορίου $\bar{K}$ δεν θα επέφερε καμία μεταβολή στο ύψος της παραγωγής. Εάν π.χ. το μέγεθος του αποθέματος κεφαλαίου δεν ήταν $\bar{K}$ αλλά K' (βλ. σημείο γ στο σχήμα 13), η παραγωγή θα διατηρούνταν αμετάβλητη στο επίπεδο $\bar{Y}$, ενώ το τμήμα $K' - \bar{K}$ της διαθέσιμης ποσότητας κεφαλαίου Κ΄ θα παρέμενε ουσιαστικά αχρησιμοποίητο, και αυτό λόγω του περιορισμού της απασχόλησης στο επίπεδο $\bar{L}$. Αυτό που ισχύει για το σημείο γ ισχύει βέβαια και για όλα τα σημεία της παράλληλος προς τον κάθετο άξονα ευθείας που αρχίζει από το σημείο α και επεκτείνεται προς τα πάνω. Στην περίπτωση, λοιπόν, συναρτήσεων παραγωγής με σταθερούς συντελεστές εισροών-εκροών ν και u, η καμπύλη ίσου προϊόντος, για ένα δοσμένο επίπεδο παραγωγής $\bar{Y}$, θα αποτελείται από τις δύο, μεταξύ τους κάθετες, ευθείες που αρχίζουν από το σημείο α και επεκτείνονται παράλληλα προς τους δύο άξονες Κ και L. Είναι προφανές ότι, στην περίπτωση αυτή, η καμπύλη ίσου προϊόντος, που έχει τώρα την μορφή του κεφαλαίου λατινικού γράμματος L, είναι **ασυνεχής**, αφού στο σημείο της α παρουσιάζει μια σαφέστατη **αιχμή**. Το γεγονός, ότι σε μιαν ορισμένη χρονική στιγμή το μέγεθος του κληρονομημένου από το παρελθόν αποθέματος μέσων παραγωγής $\bar{K}$ μαζί με τις δοσμένες τεχνικές τους προδιαγραφές καθορίζουν τόσο το μέγιστο προϊόν $\bar{Y}$ $(=\bar{K}/v)$ όσο και το μέγεθος της απασχόλησης $\bar{L}$ $(=(u/v)\bar{K})$, το γεγονός αυτό συνεπάγεται πως, την στιγμή αυτή, δεν υπάρχουν περιθώρια για μια **υποκατάσταση**, έστω και ελάχιστου βαθμού, μεταξύ των συντελεστών παραγωγής. Όπως φαίνεται και από την σύγκριση του σημείου α στο σχήμα 11 μετα τα σημεία β και γ, κάθε κίνηση, έστω και οριακή, κατά μήκος της καμπύλης ίσου προϊόντος που θα μας απομάκρυνε από το σημείο α δεν επηρεάζει την χρησιμοποιούμενη ποσότητα του ενός συντελεστή, ενώ αυξάνει ανώφελα την ποσότητα του άλλου, καθότι η παραγωγή εξακολουθεί, παρ' όλα αυτά, να παραμένει στο επίπεδο $\bar{Y}$. Τούτο σημαίνει ότι η αριθμητική τιμή του **οριακού προϊόντος** κάθε συντελεστή παραγωγής θα είναι **μηδενική** καθώς και ότι μηδενική θα είναι επίσης και η αριθμητική τιμή της **ελαστικότητας υποκατάστασης** σ. Και μια τελευταία παρατήρηση σχετικά με την καμπύλη ίσου προϊόντος $Y=\bar{Y}$ στο σχήμα 13. Εάν το μέγεθος του δοσμένου αποθέματος κεφαλαίου δεν ήταν $\bar{K}$ αλλά K^+, όπου $K^+ > \bar{K}$, και εάν το απόθεμα K^+ είχε τις ίδιες τεχνικές προδιαγραφές όπως και το απόθεμα $\bar{K}$ (δηλαδή τους ίδιους συντελεστές εισροών-εκροών ν και u), τότε το μέγεθος της απαιτούμενης απασχόλησης θα ήταν L^+ $(=(u/v)K^+)$ και το μέγιστο προϊόν Y^+ $(=K^+/v)$. Στην περίπτωση αυτή θα βρισκόμασταν στο σημείο δ της ευθείας ΟΟ΄, το οποίο θα είναι και το σημείο εκείνο από το οποίο θα διέρχεται τώρα η νέα καμπύλη ίσου προϊόντος που αντιστοιχεί στο επίπεδο παραγωγής Y^+.

Το γεγονός που υπογραμμίσαμε προηγουμένως, δηλαδή το γεγονός ότι η από το **παρελθόν** καθορισμένη τεχνική δεν επιτρέπει σήμερα την στιγμιαία υποκατάσταση του ενός συντελεστή παραγωγής από τον άλλο, το εκφράζουμε και διαφορετικά, λέγοντας πως, σε ό,τι αφορά το **παρόν** (αλλά όχι, απαραίτητα, και το **μέλλον**), οι συντελεστές παραγωγής Κ και L είναι **συμπληρωματικοί**. Τούτο μπορούμε να το διατυπώσουμε και σε όρους της γενικής συνάρτησης παραγωγής $Y=F(K,L)$, η οποία, επειδή δεν είναι πλέον συνεχής αλλά ασυνεχής, θα έχει μια αρκετά ιδιότυπη μαθηματική μορφή. Για τον σκοπό αυτό χρησιμοποιούμε τον αναλυτικό συμβολισμό

$$Y = \min(\alpha, \beta),$$

όπου τα μεγέθη α και β συμβολίζουν τις δύο αριθμητικές τιμές που είναι δυνατό να πάρει η μεταβλητή Y. Η προσθήκη της έκφρασης min (minimum = ελάχιστο) στον συνδυασμό των αριθμητικών τιμών (α, β) σημαίνει ότι η μεταβλητή Y θα ισούται με α ($Y = \alpha$), εάν το α είναι μικρότερο του β ($\alpha < \beta$), και ότι η μεταβλητή Y θα ισούται με β ($Y = \beta$), εάν το α είναι μεγαλύτερο ή ίσο του β ($\alpha \geq \beta$). Εάν π.χ. $Y = \min(3,5)$ τότε $Y = 3$, εάν $Y = \min(5,2)$ τότε $Y = 2$ και εάν $Y = \min(6,6)$ τότε $Y = 6$. Για να δούμε την χρησιμότητα του συμβολισμού $Y = \min(\alpha, \beta)$, ας υποθέσουμε ότι μας λέγεται πως οι διαθέσιμες ποσότητες των συντελεστών παραγωγής κεφάλαιο και εργασία είναι, αντίστοιχα, K και L και μας τίθεται το ερώτημα: ποιο θα είναι το μέγεθος της παραγωγής Y, στην περίπτωση που έχουμε να κάνουμε με μια τεχνική με σταθερούς συντελεστές εισροών-εκροών ν και u; Από τους ορισμούς $v = K/Y$ και $u = L/Y$ συμπεραίνουμε κατ᾽ αρχάς τα εξής: πρώτον, ότι το μέγιστο προϊόν που μπορεί να παραχθεί μέσω του δοσμένου αποθέματος κεφαλαίου K θα ισούται με K/v, στον βαθμό βέβαια που έχει εξασφαλισθεί η απαιτούμενη απασχόληση εργατικού δυναμικού και, δεύτερον, ότι το μέγιστο προϊόν που είναι δυνατό να παράξει ο δοσμένος αριθμός εργαζομένων L θα ισούται με L/u, υπό την προϋπόθεση ότι οι εργαζόμενοι αυτοί έχουν στη διάθεσή τους το απαιτούμενο απόθεμα μέσων παραγωγής. Επειδή οι ποσότητες K και L δεν μπορούν να συνδυαστούν παραγωγικά, βάσει της δοσμένης τεχνικής, παρά μόνον με την αναλογία $K/L = v/u$, είναι προφανές ότι, εάν για τις ποσότητες αυτές τυχαίνει να ισχύει $K/L > v/u$ (ή, διαφορετικά, εάν τυχαίνει να ισχύει $K/v > L/u$), τότε ένα τμήμα του K θα μείνει ανενεργό και το συνολικό προϊόν Y δεν θα ισούται με K/v αλλά θα διαμορφωθεί στο χαμηλότερο επίπεδο L/u, που θα καθορισθεί από τον περιορισμό του διαθέσιμου εργατικού δυναμικού στο ύψος L. Άρα, από τις δύο τιμές K/v και L/u που είναι δυνατό να πάρει η μεταβλητή Y, θα πραγματοποιηθεί η πιο μικρή που είναι η τιμή L/u ($K/v > L/u$). Το ίδιο θα ισχύει και στην περίπτωση όπου $K/L < v/u$ (ή, αλλιώς, στην περίπτωση όπου $K/v < L/u$). Τώρα, ένα τμήμα του διαθέσιμου εργατικού δυναμικού L θα παραμείνει άνεργο και το συνολικό προϊόν Y θα καθορισθεί από το περιορισμένο μέγεθος του κεφαλαίου K, φτάνοντας στο επίπεδο K/v και όχι στο επίπεδο L/u, στο οποίο θα μπορούσε να είχε διαμορφωθεί, εάν υπήρχαν αρκετά μέσα παραγωγής ώστε να απασχοληθεί το σύνολο του διαθέσιμου εργατικού δυναμικού L. Άρα, και εδώ ισχύει αυτό που διαπιστώσαμε προηγουμένως, δηλαδή ότι, από τις δύο τιμές K/v και L/u που μπορεί να πάρει η μεταβλητή Y, αυτή που θα πραγματοποιηθεί θα είναι η πιο μικρή, η οποία, στην προκειμένη περίπτωση, είναι η τιμή K/v ($K/v < L/u$). Συνοψίζοντας τις διαπιστώσεις αυτές με την βοήθεια του συμβολισμού $Y = \min(\alpha, \beta)$ καταλήγουμε στο γενικό συμπέρασμα ότι μια συνάρτηση παραγωγής $F=(K,L)$ με σταθερούς συντελεστές εισροών-εκροών v και u (συνάρτηση παραγωγής τύπου Leontief) θα έχει την ακόλουθη μαθηματική μορφή:

$$Y=F(K,L)=\min\left(\frac{K}{v},\frac{L}{u}\right). \tag{29}$$

Ας πάρουμε για παράδειγμα τον συνδυασμό $K=\overline{K}$ και $L=L^{+}$ στο σχήμα 13 (βλ. σημείο ε). Σχεδιάζοντας νοητικά την ευθεία που συνδέει την αρχή των αξόνων με το σημείο ε και συγκρίνοντας την κλίση της ευθείας αυτής με την κλίση της ευθείας Οα, βλέπουμε ότι για τον συνδυασμό $\overline{K}$ και L^{+} ισχύει: $\overline{K}/L^{+}<v/u$ (ή, εναλλακτικά, $\overline{K}/v<L^{+}/u$). Το μέγιστο προϊόν $\overline{Y}$ που είναι δυνατό να παραχθεί μέσω του αποθέματος κεφαλαίου $\overline{K}$ ισούται με: $\overline{Y}=\overline{K}/v$. Από την άλλη μεριά, με την απασχόληση του συνολικά διαθέσιμου εργατικού δυναμικού L^{+} θα μπορούσε δυνητικά να παραχθεί, εάν υπήρχε η απαιτούμενη ποσότητα μέσων παραγωγής, μια ποσότητα προϊόντος Y^{+} που θα ήταν μεγαλύτερη της $\overline{Y}$ και θα ήταν ίση με $Y^{+}=L^{+}/u$ (βλ. σημείο δ στο σχήμα 13):

$$\overline{Y}=\frac{\overline{K}}{v}<\frac{L^{+}}{u}=Y^{+}.$$

Όμως, αυτή η απαιτούμενη ποσότητα μέσων παραγωγής που ισούται με K^{+} ($=(v/u)L^{+}$), υπερβαίνει την διαθέσιμη ποσότητα $\overline{K}$ ($K^{+}>\overline{K}$). Άρα, από τις δύο δυνατότητες $\overline{Y}=\overline{K}/v$ και $Y^{+}=L^{+}/u$ θα πραγματοποιηθεί η πιο μικρή, δηλαδή η πρώτη

$$\min\left(\frac{\overline{K}}{v},\frac{L^{+}}{u}\right)=\frac{\overline{K}}{v}=\overline{Y}$$

με αποτέλεσμα, από το συνολικά διαθέσιμο εργατικό δυναμικό L^{+} να απασχοληθεί μόνον το τμήμα του $\overline{L}$, ενώ το υπόλοιπο $L^{+}-\overline{L}$ θα παραμείνει άνεργο.

4.4. Ρυθμοί μεγέθυνσης Ι

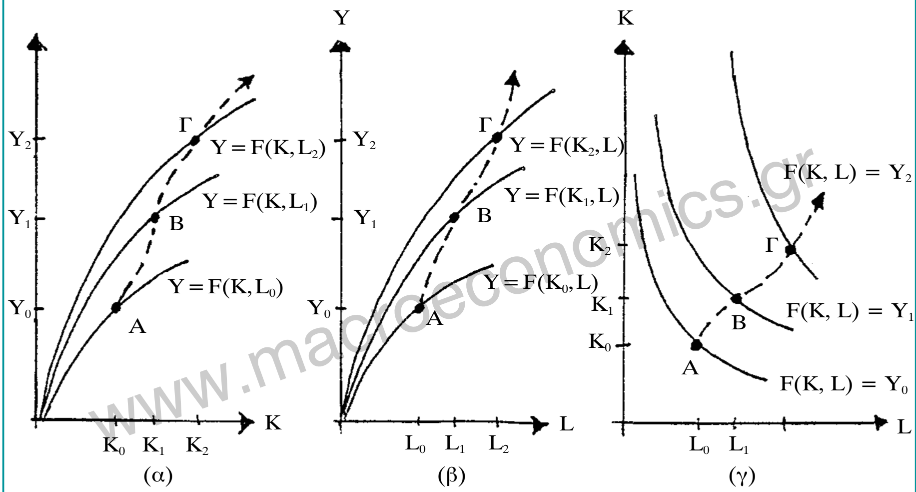
(α) Όρια της γραφικής απεικόνισης της $Y=F(K,L)$

Πριν προχωρήσουμε στην παρουσίαση και τον σχολιασμό της τρίτης και τελευταίας μαθηματικής ιδιότητας (γραμμική ομογένεια) που θα πρέπει, σύμφωνα με την νεοκλασική θεωρία, να διαθέτει η μακροοικονομική συνάρτηση παραγωγής $Y=F(K,L)$, θα θέλαμε να επανέλθουμε για λίγο στο σχήμα 8 με την βοήθεια του οποίου καταγράψαμε προηγουμένως τις συνέπειες που έχουν για την μορφή της συνάρτησης $Y=F(K,L)$ οι δύο πρώτες ιδιότητές της (διπλή παραγωγισιμότητα και κυρτότητα). Μόνον εάν έχει κανείς κάποτε προσπαθήσει να σχεδιάσει ο ίδιος την τρισδιάστατη επιφάνεια της συνάρτησης $Y=F(K,L)$ στον δισδιάστατο χώρο μιας σελίδας χαρτιού, μπορεί πράγματι να εκτιμήσει τα πλεονεκτήματα του σχήματος 8. Μόνον τότε συνειδητοποιεί πόσο πιο εύκολο είναι να επιλέξει ένα οποιοδήποτε σημείο της επιφάνειας αυτής – π.χ. το σημείο L_0, K_0 και Y_0 $(=F(K_0, L_0))$ – και να σχεδιάσει τις τρεις κάθετες τομές της, αποκτώντας έτσι τις τρεις δισδιάστατες καμπύλες που απεικονίζονται στα τρία διαγράμματα του σχήματος 8. Δηλαδή τις δύο καμπύλες των ειδικών συναρτήσεων παραγωγής $Y = F(K, L_0)$ και $Y = F(K_0, L)$ και την καμπύλη ίσου προϊόντος $F(K, L) = Y_0$. Η χρησιμότητα του σχήματος 8 γίνεται ακόμη πιο εμφανής, εάν σκεφθεί κανείς ότι μπορεί, παρακολουθώντας απλώς τις γεωμετρικές κλίσεις των τριών αυτών καμπυλών, να σχεδιάσει το ίδιο εύκολα και τις καμπύλες των οριακών προϊόντων των συντελεστών παραγωγής K και L (δηλαδή τις καμπύλες των συναρτήσεων $F_K(K, L_0)$ και $F_L(K_0, L)$) καθώς και την καμπύλη υποκατάστασης του ενός από τον άλλο συντελεστή για το δοσμένο επίπεδο παραγωγής Y_0.

Όμως, παρά την αναμφισβήτητη χρησιμότητά του, το σχήμα 8 αποτελεί μια σχετικά άκομψη και περίπλοκη γεωμετρική κατασκευή, η οποία έχει επίσης και το μειονέκτημα να είναι **στατική**, με την έννοια ότι απεικονίζει την κατάσταση στην οποία βρίσκεται ο παραγωγικός τομέας της οικονομίας σε μια ορισμένη χρονική στιγμή. Και συγκεκριμένα, στην χρονική στιγμή t_0, κατά την οποία το συνολικό απόθεμα κεφαλαίου τυχαίνει να ισούται με K_0, η συνολική απασχόληση εργατικού δυναμικού με L_0 και το συνολικά παραγόμενο προϊόν με Y_0. Αυτή η γεωμετρική κατασκευή γίνεται, ωστόσο, ακόμα πιο άκομψη και περίπλοκη, όταν έρχεται η στιγμή όπου θα πρέπει να ενταχθεί σε ένα πλαίσιο **δυναμικής** ανάλυσης και να χρησιμοποιηθεί για να παρουσιασθεί σχηματικά η πορεία που ακολουθεί διαχρονικά ο παραγωγικός τομέας μιας **μεγεθυνόμενης** οικονομίας. Όταν, δηλαδή έρχεται η στιγμή όπου θα χρειαστεί να απεικονισθεί στα τρία διαγράμματα του σχήματος 8 η επίπτωση που έχει στο μέγεθος του παραγόμενου προϊόντος Y η **ταυτόχρονη** και **συνεχής** αύξηση του αποθέματος μέσων παραγωγής K (συσσώρευση κεφαλαίου), της απασχόλησης εργατικού δυναμικού L και, ενδεχομένως, και του ρυθμού της «τεχνικής προόδου».

Για να αποκτήσει κανείς μια πρώτη γεύση των αλλαγών που θα προκύψουν στο σχήμα 8, αρκεί να αναρωτηθεί για το τι θα συμβεί στα τρία διαγράμματά του, εάν μεταβληθεί ξαφνικά η αριθμητική τιμή των αρχικών μεγεθών L_0 και K_0 και συνεπώς και η αριθμητική τιμή του μεγέθους Y_0 $(= F(K_0, L_0))$. Επειδή το μέγεθος L_0 εμφανίζεται ως παράμετρος της συνάρτησης $Y = F(K, L_0)$, το μέγεθος K_0 ως παράμετρος της συνάρτησης $Y = F(K_0, L)$ και το μέγεθος Y_0 ως παράμετρος της συνάρτησης $F(K, L) = Y_0$, είναι προφανές ότι, εάν μεταβληθούν ταυτόχρονα και τα τρία μεγέθη L_0, K_0 και Y_0, τότε οι καμπύλες των συναρτήσεων αυτών στο σχήμα 8 δεν θα παραμείνουν στάσιμες αλλά θα **μετατοπισθούν** σε μια νέα θέση. Σε μια θέση που θα βρίσκεται πάνω ή κάτω από την αρχική, ανάλογα με το εάν έχει αυξηθεί ή μειωθεί το μέγεθος της παραμέτρου που αντιστοιχεί στην συνάρτηση της κάθε καμπύλης στο σχήμα 8. Συνεπώς, η ταυτόχρονη αύξηση και των τριών μεγεθών L_0, K_0 και Y_0 θα μεταφρασθεί σε μια ταυτόχρονη μετατόπιση προς τα πάνω και των τριών καμπυλών που απεικονίζονται στα τρία διαγράμματα του σχήματος 8. Όμως, την ίδια στιγμή, θα μετακινηθεί στα διαγράμματα αυτά και η θέση του σημείου Α. Τώρα, το σημείο αυτό θα βρεθεί πάνω στις μετατοπισμένες καμπύλες και μάλιστα σε μια θέση που θα είναι υψηλότερη από την αρχική. Και αυτό επειδή θα έχουν τώρα αυξηθεί, σε κάθε διάγραμμα του σχήματος 8, οι συντεταγμένες του σημείου Α, οι οποίες ήταν αρχικά K_0 και Y_0 στο διάγραμμα 8.α, L_0 και Y_0 στο διάγραμμα 8.β και, στο διάγραμμα 8.γ, L_0 και K_0.

Αν θέλαμε, λοιπόν, να καταγράψουμε στα τρία διαγράμματα του σχήματος 8 την διαχρονική πορεία που ακολουθεί σε μια μεγεθυνόμενη οικονομία η μεταβλητή Υ, καθώς αυξάνονται διαδοχικά οι τιμές των μεταβλητών K και L (π.χ. από K_0 σε K_1, από K_1 σε K_2 κ.ο.κ. και από L_0 σε L_1, από L_1 σε L_2 κ.ο.κ.), θα πρέπει να προσθέτουμε, κάθε φορά, στα διαγράμματα αυτά και μια νέα καμπύλη, πράγμα που έχουμε προσπαθήσει να κάνουμε στο σχήμα 14. Όμως αυτό δεν αρκεί. Θα πρέπει, στη συνέχεια, να καταγράφουμε στους άξονες των συνεχώς προς τα πάνω μετατοπιζόμενων καμπυλών του σχήματος 14 και τις διαδοχικές τιμές των μεταβλητών K και L (K_0, K_1, K_2, ... και L_1, L_2, L_3, ...) καθώς επίσης και τις τιμές Y_0, Y_1, Y_2, ... που παίρνει διαδοχικά η μεταβλητή Υ, κάθε φορά που μεταβάλλεται ο συνδυασμός των συντελεστών παραγωγής K και L και μετατρέπεται από (K_0,L_0) σε (K_1,L_1), από (K_1,L_1) σε (K_2,L_2) κ.ο.κ.. Έτσι θα εντοπίζαμε και στα τρία διαγράμματα του σχήματος 14 μια σειρά διαδοχικών σημείων Α, Β, Γ κλπ., τα οποία θα τα ενώναμε με μια γραμμή που κατά κανόνα δεν θα είναι βέβαια ευθεία. Η γραμμή αυτή θα μας δείχνει την **διαχρονική πορεία** ή **τροχιά** που ακολουθεί το μέγεθος του συνολικού προϊόντος Υ, καθώς αυξάνεται διαδοχικά τόσο το μέγεθος του συνολικά επενδυμένου κεφαλαίου K όσο και το μέγεθος του απασχολούμενου εργατικού δυναμικού L. Εάν μάλιστα κάναμε τον κόπο να σχεδιάσουμε και την καμπύλη υποκατάστασης που αντιστοιχεί στην αρχική καμπύλη ίσου προϊόντος στο διάγραμμα 8.γ, θα διαπιστώναμε ότι οι διαδοχικές μετατοπίσεις της τελευταίας, έτσι όπως αυτές απεικονίζονται στο διάγραμμα 14.γ, θα είχαν ως συνέπεια την συνεχή μετατόπιση και της καμπύλης υποκατάστασης. Το ίδιο θα ισχύει προφανώς και για τις καμπύλες των οριακών προϊόντων των συντελεστών παραγωγής K και L. Τις μετατοπίσεις αυτών των δύο καμπυλών θα μπορούσαμε να τις καταγράψουμε σε δύο διαφορετικά σχήματα, παρακολουθώντας τον τρόπο με τον οποίο μεταβάλλεται η γεωμετρική κλίση των καμπυλών που έχουν σχεδιασθεί στο σχήμα 14.α και στο σχήμα 14.β. Είναι εύκολο να φαντασθεί κανείς πόσο ακόμα πιο περίπλοκες και πιο δύσχρηστες (αν όχι, πρακτικά, άχρηστες) θα γινόνταν όλες αυτές οι γεωμετρικές κατασκευές, εάν προσπαθούσαμε να αποτυπώσουμε πάνω στις συνεχώς μετατοπιζόμενες καμπύλες του σχήματος 14 και πληροφορίες σχετικές με τις μεταβολές που υφίστανται διαχρονικά και διάφορα άλλα σημαντικά, από άποψη οικονομικής ερμηνείας, μεγέθη όπως είναι λ.χ. το μέσο και οριακό προϊόν κάθε συντελεστή παραγωγής, οι μερικές ελαστικότητες της παραγωγής ε_K και ε_L, ο λόγος κεφαλαίου-εργασίας k, οι λόγοι οριακής υποκατάστασης $-dK/dL$ και $-dL/dK$ και η ελαστικότητα υποκατάστασης σ.



Σχήμα 14.

Όπως θα διαπιστώσουμε σε λίγο, όλες αυτές οι περιπλοκές ελαχιστοποιούνται στην περίπτωση που υιοθετηθεί και η τρίτη νεοκλασική παραδοχή, η οποία απαιτεί από την μακροοικονομική συνάρτηση παραγωγής να είναι, όχι μόνο διπλά παραγωγίσιμη και κυρτή, αλλά ταυτόχρονα και γραμμικά ομογενής. Θα πρέπει, βέβαια, να υπογραμμισθεί το γεγονός ότι η εισαγωγή αυτής της νέας παραδοχής οφείλεται σε καθαρά θεωρητικούς λόγους. Σε λόγους που έχουν να κάνουν με την πρόθεση της νεοκλασικής θεωρίας να θεμελιώσει αναλυτικά την ακόλουθη, αρκετά προκλητική, θέση. Σε μια μεγεθυνόμενη οικονομία που λειτουργεί υπό καθεστώς τέλειου ανταγωνισμού, η διανομή του εισοδήματος μεταξύ μισθών και κερδών εξαρτάται, αποκλειστικά και μόνο, από τις τεχνικές σχέσεις παραγωγής. Δηλαδή, από τις τεχνικές (διάβαζε, μαθηματικές) ιδιότητες της μακροοικονομικής συνάρτησης παραγωγής $Y = F(K, L)$ και, συγκεκριμένα, από την ελαστικότητα τεχνικής υποκατάστασης (σ) μεταξύ των συντελεστών παραγωγής κεφάλαιο και εργασία. Όμως, θα πρέπει επίσης να υπογραμμισθεί πως ευπρόσδεκτο υποπροϊόν της παραδοχής περί γραμμικής ομογένειας της συνάρτησης $Y = F(K, L)$ είναι το γεγονός ότι απλουστεύει κατά πολύ όλες τις γεωμετρικές κατασκευές, για τις οποίες μιλήσαμε προηγουμένως. Και ακόμα περισσότερο, ότι μας επιτρέπει να συμπτύξουμε τα τρία διαγράμματα με τις **συνεχώς μετατοπιζόμενες** καμπύλες του σχήματος 14 σε ένα διάγραμμα, στο οποίο θα απεικονίζεται μία και μόνον καμπύλη. Και μάλιστα μία καμπύλη που θα παραμένει **διαχρονικά στάσιμη**, και την οποία, για τον λόγο αυτό, μπορεί κανείς να την χρησιμοποιήσει ως βάση για να παρουσιάσει διαγραμματικά, χωρίς ιδιαίτερες γεωμετρικές περιπλοκές, τόσο την νεοκλασική θεωρία της παραγωγής και της διανομής όσο και την νεοκλασική θεωρία της συσσώρευσης κεφαλαίου και της οικονομικής μεγέθυνσης.

Πριν όμως αρχίσουμε την συζήτηση για την παραδοχή περί γραμμικής ομογένειας της συνάρτησης $Y = F(K, L)$, θα ήταν χρήσιμο να εξετάσουμε τη δυνατότητα παράκαμψης των περίπλοκων γεωμετρικών κατασκευών του σχήματος 14 μέσω του ποσοτικού **υπολογισμού** της επίπτωσης που έχει, στο ύψος της συνολικής παραγωγής Y, η ταυτόχρονη και συνεχής αύξηση του αποθέματος κεφαλαίου K και της απασχόλησης L. Και για να γίνουμε πιο σαφής, αυτό που θα θέλαμε να παρουσιάσουμε τώρα είναι ο τρόπος με τον οποίο μπορεί να υπολογισθεί – βάσει των όσων έχουν, μέχρι στιγμής, υποτεθεί για τις μαθηματικές ιδιότητες της συνάρτησης $Y = F(K, L)$ – ο ρυθμός g_Y, με τον οποίο μεγεθύνεται διαχρονικά το συνολικό προϊόν Y, όταν γνωρίζουμε τους ρυθμούς g_K και g_L, με τους οποίους αυξάνονται, αντίστοιχα, το συνολικό απόθεμα κεφαλαίου K και η συνολική απασχόληση εργατικού δυναμικού L.

(β) Η σχέση μεταξύ των ρυθμών μεγέθυνσης g_Y, g_K και g_L

Όταν μας δίνεται η συνάρτηση παραγωγής $Y = F(K, L)$ και μας ζητείται να υπολογίσουμε τον στιγμιαίο ρυθμό μεγέθυνσης της εξαρτημένης μεταβλητής Y, το πρώτο που θα πρέπει να κάνουμε, σύμφωνα με τον κανόνα 3, είναι να υπολογίσουμε την πρώτη παράγωγο της συνάρτησης $Y = F(K, L)$ ως προς τον χρόνο t, μη ξεχνώντας βέβαια ότι εδώ πρόκειται για μια **σύνθετη** συνάρτηση, αφού οι μεταβλητές της K και L είναι συναρτήσεις μιας τρίτης μεταβλητής, η οποία, στην προκειμένη περίπτωση, είναι η μεταβλητή t (χρόνος). Εάν, λοιπόν, $K = K(t)$ και $L = L(t)$ είναι δύο δοσμένες συνεχείς συναρτήσεις που απεικονίζουν την διαχρονική πορεία των μεταβλητών K και L, τότε για την πρώτη παράγωγο της $Y = F(K, L)$ ως προς t θα ισχύει, βάσει του αλυσωτού κανόνα παραγώγισης, η σχέση

$$\frac{dY}{dt} = F_K \frac{dK}{dt} + F_L \frac{dL}{dt},$$

όπου $F_K \equiv \partial Y/dK$ και $F_L \equiv \partial Y/dL$. Προκειμένου να έχομε στην αριστερή πλευρά της σχέσης αυτής τον ρυθμό μεγέθυνσης της Y ($\equiv (dY/dt)/Y$), θα πρέπει να διαιρέσουμε και τις δύο πλευρές της με Y:

$$\frac{1}{Y}\frac{dY}{dt} = \frac{F_K}{Y}\frac{dK}{dt} + \frac{F_L}{Y}\frac{dL}{dt}.$$

Πολλαπλασιάζοντας και διαιρώντας ταυτόχρονα τον πρώτο όρο της δεξιάς πλευράς με K και τον δεύτερο με L, έχουμε την σχέση

$$\frac{1}{Y}\frac{dY}{dt} = \left(\frac{KF_K}{Y}\right)\frac{1}{K}\frac{dK}{dt} + \left(\frac{LF_L}{Y}\right)\frac{1}{L}\frac{dL}{dt},$$

η οποία μπορεί να διατυπωθεί και ως εξής:

$$g_Y = \left(\frac{KF_K}{Y}\right)g_K + \left(\frac{LF_L}{Y}\right)g_L, \tag{30}$$

όπου g_Y, g_K και g_L οι αντίστοιχοι στιγμιαίοι ρυθμοί μεγέθυνσης των μεταβλητών Y, K και L. Όμως, οι δύο εκφράσεις σε παρένθεση δεν είναι τίποτε άλλο παρά οι μερικές ελαστικότητες της παραγωγής ε_K και ε_L (για τους σχετικούς ορισμούς βλ. 26). Η εισαγωγή των συμβολισμών ε_K και ε_L στην 30 μας δίνει, τελικά, την ζητούμενη σχέση μεταξύ των ρυθμών μεγέθυνσης g_Y, g_K και g_L:

$$g_Y = \varepsilon_K g_K + \varepsilon_L g_L. \tag{31}$$

Έσι καταλήγουμε στον ακόλουθο γενικό κανόνα: υπό την προϋπόθεση ότι η συνάρτηση παραγωγής $Y = F(K, L)$ είναι διπλά παραγωγίσιμη και κυρτή, ο ρυθμός με τον οποίο τείνει να μεγεθύνεται, σε μια δοσμένη χρονική στιγμή, το συνολικό προϊόν Y μπορεί να υπολογιστεί ως το **σταθμισμένο άθροισμα** των στιγμιαίων ρυθμών μεγέθυνσης του αποθέματος κεφαλαίου K και της απασχόλησης L, όπου τα σχετικά σταθμά θα είναι, αντίστοιχα, οι μερικές ελαστικότητες της παραγωγής ε_K και ε_L.

Αν και είναι αυτονόητο, θα θέλαμε ωστόσο να τονισθεί ότι οι ελαστικότητες ε_K και ε_L **δεν παραμένουν** διαχρονικά **σταθερές**. Επειδή αυτές εξαρτώνται – όπως φαίνεται και από τους ορισμούς 26 – από την μαθηματική μορφή της συνάρτησης $Y = F(K, L)$, είναι προφανές ότι το μέγεθός τους θα μεταβάλλεται διαχρονικά καθώς θα μεταβάλλεται το μέγεθος των μεταβλητών K και L. Το μόνο που γνωρίζουμε για τις ελαστικότητες ε_K και ε_L είναι ότι, λόγω της κυρτότητας της $Y = F(K, L)$, οι αριθμητικές τους τιμές θα κυμαίνονται μεταξύ του μηδενός και της μονάδας ($0 < \varepsilon_K < 1$, $0 < \varepsilon_L < 1$). Βέβαια, στον βαθμό που είναι γνωστή η μαθηματική μορφή της συνάρτησης παραγωγής $Y = F(K, L)$, οι ορισμοί 26 μας επιτρέπουν να υπολογίσουμε τις αριθμητικές τιμές των ελαστικοτήτων ε_K και ε_L που αντιστοιχούν στις τιμές με τις οποίες εμφανίζονται, σε μια ορισμένη χρονική στιγμή, οι μεταβλητές K και L. Μπορούμε μάλιστα να προχωρήσουμε ένα βήμα πάρα πέρα και να χρησιμοποιήσουμε τις τιμές αυτές των ελαστικοτήτων ε_K και ε_L για να υπολογίσουμε, βάσει του κανόνα 31, την επιμέρους **συμβολή** της αύξησης του κάθε συντελεστή παραγωγής K και L στην αύξηση του συνολικού προϊόντος Y. Εάν γνωρίζουμε τον ρυθμό g_K και τον ρυθμό g_L, με τους οποίους αυξάνονται, σε μια ορισμένη χρονική στιγμή, τα μεγέθη των συντελεστών παραγωγής K και L, και εάν έχουμε ήδη υπολογίσει, για την στιγμή αυτή, τις τιμές των ελαστικοτήτων ε_K και ε_L, τότε μπορούμε, με την βοήθεια του κανόνα 31, να υπολογίσουμε τον ρυθμό g_Y, με τον οποίο αυξάνεται το συνολικό προϊόν Y, και να ισχυρισθούμε ότι το γινόμενο $\varepsilon_K g_K$ μας δείχνει εκείνο το τμήμα του ρυθμού μεγέθυνσης g_Y, το οποίο οφείλεται στην αύξηση του αποθέματος κεφαλαίου K, ενώ το γινόμενο $\varepsilon_L g_L$

μας δείχνει το άλλο τμήμα του g_Y, το οποίο οφείλεται στην αύξηση της απασχόλησης L. Ας υποθέσουμε π.χ. ότι, σε μια δοσμένη χρονική στιγμή, το απόθεμα κεφαλαίου K αυξάνεται κατά 5% και η απασχόληση εργατικού δυναμικού κατά 4% και ότι, την στιγμή αυτή, οι ελαστικότητες της παραγωγής ως προς K και ως προς L τυχαίνει να είναι, αντίστοιχα, 0,8 και 0,5. Στην περίπτωση αυτή μπορούμε να ισχυρισθούμε, βάσει του κανόνα 31, όχι μόνο ότι το συνολικό προϊόν Y θα πρέπει να έχει αυξηθεί κατά 6%

$$\begin{aligned} g_Y &= \varepsilon_K g_K + \varepsilon_L g_L = \\ &= (0,8)(5\%) + (0,5)(4\%) = \\ &= 4\% + 2\% = 6\% \end{aligned}$$

αλλά και ότι οι 4 από τις 6 ποσοστιαίες μονάδες αύξησης του συνολικού προϊόντος Y οφείλονται στην κατά 5% αύξηση του αποθέματος κεφαλαίου K, ενώ οι υπόλοιπες 2 ποσοστιαίες μονάδες οφείλονται στην κατά 4% αύξηση της απασχόλησης L.

Στο σημείο αυτό εμφανίζεται ένα σοβαρό μεθοδολογικό πρόβλημα. Τι θα λέγαμε σε κάποιον που θα αποφάσιζε να μην χρησιμοποιήσει τον κανόνα 31 για να υπολογίσει τον ρυθμό μεγέθυνσης g_Y και, αντί αυτού, επέλεγε να μετρήσει απευθείας, με στατιστικές μεθόδους, την αύξηση του συνολικού προϊόντος Y και διαπίστωνε ότι ο ρυθμός μεγέθυνσης g_Y είναι στην πραγματικότητα 9% και όχι 6%, όπως προβλέπεται από την εφαρμογή του κανόνα 31; Μία αντίδραση απέναντι σ' αυτήν την σημαντική διαφορά ανάμεσα στον πραγματικό και στον προβλεφθέντα ρυθμό μεγέθυνσης, μια διαφορά που ανέρχεται στις τρεις ποσοστιαίες μονάδες (9% – 6% = 3%), θα ήταν να αμφισβητήσουμε την αρχή στην οποία στηρίζεται η μέθοδος μέτρησης που μας προτείνει ο κανόνας 31, αφού η εφαρμογή της μεθόδου αυτής αφήνει «ανεξήγητο» το 1/3 του πραγματικού ρυθμού μεγέθυνσης του συνολικού προϊόντος (το 3% αποτελεί το 1/3 του 9%). Μια άλλη αντίδραση θα ήταν να θεωρήσουμε πως ο κανόνας 31 είναι μεθοδολογικά άψογος με το επιχείρημα ότι, αφενός εκτιμά σωστά την συμβολή των συντελεστών παραγωγής κεφάλαιο και εργασία (4% και 2%, αντίστοιχα) και, αφετέρου, ότι κατορθώνει να εντοπίσει την ύπαρξη ενός άλλου «άγνωστου» συντελεστή που η νεοκλασική θεωρία θα τον αποκαλέσει, γενικά, **«τεχνική πρόοδο»** και στου οποίου την επενέργεια θα χρεωθεί, εκ των υστέρων και υποθετικά, η διαφορά των τριών ποσοστιαίων μονάδων ανάμεσα στον πραγματικό ρυθμό μεγέθυνσης και στον ρυθμό που υπολογίζεται με βάση τον κανόνα 31[21].

Για να αποκατασταθεί, τουλάχιστον τυπικά, η τραυματισμένη υπόληψη του κανόνα 31, έτσι ώστε να μπορεί να συμπεριληφθεί στην μαθηματική του μορφή και η συμβολή της τεχνικής προόδου στον ρυθμό μεγέθυνσης του συνολικού προϊόντος Y, χρησιμοποιείται συχνά στην νεοκλασική βιβλιογραφία, αντί της συνάρτησης παραγωγής $Y = F(K, L)$, η διευρυμένη της εκδοχή $Y = F(K, L, t)$. Με την ανακήρυξη του χρόνου t

[21] Ο πειρασμός είναι πολύ μεγάλος για να μην πει κανείς ότι η επίκληση αυτή στην επίδραση ενός «αγνώστου» συντελεστή παραγωγής μοιάζει με την επίκληση που έκαναν οι αρχαίοι έλληνες στις βουλές ενός «αγνώστου» θεού, κάθε φορά που αντιμετώπιζαν φαινόμενα που δεν μπορούσαν να τα εξηγήσουν με παραπομπές σε επενέργειες των γνωστών τους θεών.

σε ανεξάρτητη μεταβλητή της μακροοικονομικής συνάρτησης παραγωγής υπονοείται πως στην αύξηση του προϊόντος Y συμβάλλει, όχι μόνο η αύξηση των κεφαλαιουχικών αγαθών K και η αύξηση της απασχόλησης L, αλλά και η τεχνική πρόοδος με την ακόλουθη – βέβαια άκρως προβληματική – σημασία του όρου: με την πάροδο του χρόνου t σημειώνεται μια **συνεχής** αύξηση του προϊόντος Y, η οποία **δεν οφείλεται** σε ποσοτικές ή ποιοτικές αλλαγές του κεφαλαιουχικού εξοπλισμού K ή του απασχολούμενου εργατικού δυναμικού L αλλά αποτελεί **δωρεάν ευεργέτημα** κάποιων **άγνωστων παραγόντων**. Παραγόντων που έρχονται ως «μάννα εξ ουρανού» και επενεργούν βελτιωτικά επί της οικονομίας, συμβάλλοντας από μόνοι τους (δηλαδή χωρίς να επιδρούν πάνω στους άλλους συντελεστές παραγωγής) στη συνεχή αύξηση του προϊόντος Y, ακόμα και όταν δεν μεταβάλλεται διαχρονικά (ή, ακόμα και αν μειώνεται διαχρονικά) το απόθεμα κεφαλαίου K και το μέγεθος της απασχόλησης L[22].

Εάν υιοθετηθεί αυτή η αμφιλεγόμενη αντίληψη για την προέλευση και την επίδραση της τεχνικής προόδου (**εξωγενής** τεχνική πρόοδος που **δεν ενσωματώνεται** στους υλικούς και τους ανθρώπινους συντελεστές της παραγωγής), τότε από την παραγώγιση της διευρυμένης συνάρτησης παραγωγής $Y = F(K, L, t)$ ως προς τον χρόνο t προκύπτει η έκφραση

$$\frac{dY}{dt} = F_K \frac{dK}{dt} + F_L \frac{dL}{dt} + \frac{\partial Y}{\partial t},$$

όπου η μερική παράγωγος $\partial Y/\partial t$ συμβολίζει την αύξηση που υφίσταται το προϊόν Y υπό την επιρροή της εξωγενούς τεχνικής προόδου. Από την έκφραση αυτή και βάσει των ίδιων ακριβώς πράξεων που μας οδήγησαν προηγουμένως στον κανόνα 31 προκύπτει, ως γενικευμένη εκδοχή του τελευταίου, ο κανόνας

$$g_Y = \varepsilon_K g_K + \varepsilon_L g_L + m \qquad (31')$$

όπου

$$m \equiv \frac{1}{Y}\frac{\partial Y}{\partial t}.$$

Το γράμμα m στην δεξιά πλευρά της 31΄ συμβολίζει τον **ρυθμό** της εξωγενούς τεχνικής προόδου, δηλαδή την ποσοστιαία αύξηση του προϊόντος Y που δεν σχετίζεται με τον ρυθμό συσσώρευσης κεφαλαίου g_K ή τον ρυθμό μεταβολής της απασχόλησης εργατικού δυναμικού g_L αλλά οφείλεται, αποκλειστικά και μόνο, στην πάροδο του χρόνου t. Στο αριθμητικό παράδειγμα που σχολιάσαμε προηγουμένως, ο ρυθμός της τεχνικής προόδου m (που αποκαλείται συχνά και **«υπόλοιπο» Solow**) θα πρέπει να ισούται με 3% αφού αυτό ακριβώς είναι το ποσοστό στην έκφραση 31΄ που αρκεί για να γεφυρωθεί η διαφορά μεταξύ της αριθμητικής τιμής του g_Y (=9%) και της αριθμητικής τιμής του αθροίσματος $\varepsilon_K g_K + \varepsilon_L g_L$ (=4% + 2% = 6%).

---

[22] Εάν θελήσει κανείς να καταγράψει στα τρία διαγράμματα του σχήματος 14 την επενέργεια αυτής της εξωγενούς τεχνικής προόδου, θα πρέπει να μετατοπίζει ακόμα περισσότερο προς τα πάνω τις σχετικές καμπύλες, δείχνοντας έτσι ότι αύξηση της μεταβλητής Y δεν οφείλεται μόνο στην αύξηση των μεταβλητών K και L αλλά και στην πάροδο του χρόνου t.

Για την αξιολόγηση της εξελικτικής πορείας που ακολουθεί μια οικονομία στην διάρκεια του χρόνου, πολύ μεγαλύτερη σημασία από τον ρυθμό αύξησης του συνολικού προϊόντος έχει ο ρυθμός αύξησης της παραγωγικότητας της εργασίας. Δηλαδή, ο ρυθμός αύξησης του μέσου προϊόντος ανά εργαζόμενο $y\ (=Y/L)$, ο οποίος, σύμφωνα με τον κανόνα 18, θα πρέπει να ισούται με την διαφορά μεταξύ του ρυθμού μεγέθυνσης του συνολικού προϊόντος Y και της συνολικής απασχόλησης L:

$$g_y = g_Y - g_L .$$

Εισάγωντας στην διαφορά αυτή την αντίληψη περί τεχνικής προόδου που αποτυπώνεται στην 31΄, καταλήγουμε στην έκφραση

$$g_y = \left(\varepsilon_K g_K - (1-\varepsilon_L) g_L\right) + m\,, \qquad (32)$$

η οποία μας λέγει ότι μόνον ένα τμήμα της ποσοστιαίας αύξησης της παραγωγικότητας (και συγκεκριμένα το τμήμα $\varepsilon_K g_K - (1-\varepsilon_L) g_L$) οφείλεται στις μεταβολές της συσσώρευσης φυσικού κεφαλαίου K και της απασχόλησης L, ενώ το υπόλοιπο τμήμα m θα πρέπει να θεωρηθεί πως αποτελεί προϊόν της επίδρασης της τεχνικής προόδου. Από τα αριθμητικά στοιχεία του παραδείγματος στο οποίο αναφερθήκαμε προηγουμένως υπολογίζουμε, με βάση την έκφραση 32, ότι στην περίπτωση αυτή η αύξηση της παραγωγικότητας της εργασίας θα πρέπει να ισούται με 5%:

$$\begin{aligned} g_y &= \left(\varepsilon_K g_K - (1-\varepsilon_L) g_L\right) + m = \\ &= \left((0,8)(5\%) - (1-0,5)(4\%)\right) + 3\% = \\ &= (4\% - 2\%) + 3\% = \\ &= 2\% + 3\% = 5\%. \end{aligned}$$

Όμως, μόνον τα 2/5 της αύξησης της παραγωγικότητας (2 από τις 5 ποσοστιαίες μονάδες) είναι δυνατόν να «εξηγηθούν» με αναφορές στην κατά 5% αύξηση του φυσικού κεφαλαίου K και στην κατά 4% αύξηση της απασχόλησης L. Άρα, τα υπόλοιπα 3/5 (δηλαδή οι υπόλοιπες 3 από τις 5 ποσοστιαίες μονάδες) θα πρέπει να χρεωθούν στην επίδραση της εξωγενούς τεχνικής προόδου. Εάν είναι κανείς διατεθειμένος να αποδεχθεί την επιχειρηματολογία αυτή, τότε μπορεί πολύ εύκολα να υπολογίσει και την επίπτωση που θα είχε στον ρυθμό αύξησης της παραγωγικότητας μια επιβράδυνση της τεχνικής προόδου π.χ. από το επίπεδο του 3% στο επίπεδο του 1%. Επειδή, σύμφωνα με την 32, η τεχνική πρόοδος υποτίθεται ότι αφήνει ανέπαφους τους ρυθμούς μεγέθυνσης g_K και g_L, η πτώση του ρυθμού m από 3% σε 1% θα εκφρασθεί με μια ισόποση επιβράδυνση του ρυθμού αύξησης της παραγωγικότητας g_y, ο οποίος, από 5%, θα γίνει τώρα 3%.

4.5. Η τρίτη ιδιότητα της $Y = F(K,L)$*: γραμμική ομογένεια*

(α) Ομογενείς συναρτήσεις

Απομένει τώρα να εξετάσουμε τις συνέπειες που έχει για την μορφή της μακροοικονομικής συνάρτησης παραγωγής $Y = F(K,L)$ – για την οποία έχουμε ήδη υποθέσει ότι είναι διπλά παραγωγίσιμη και κυρτή – και η τελευταία παραδοχή σύμφωνα με την οποία η συνάρτηση $Y = F(K, L)$ θα πρέπει να είναι επίσης και **ομογενής πρώτου βαθμού** ή, αλλιώς, **γραμμικά ομογενής**. Σύμφωνα με τον γενικότερο ορισμό, μια πλειομεταβλητή συνάρτηση $y = f(x_1, \ldots, x_n)$ είναι ομογενής με **βαθμό ομογένειας ρ**, εάν ο πολλαπλασιασμός όλων των ανεξάρτητων μεταβλητών $x_1, \ldots, x_n$ με μια σταθερά λ έχει ως συνέπεια τον πολλαπλασιασμό της εξαρτημένης μεταβλητής y με την σταθερά λ υψωμένη στην δύναμη ρ. Συνεπώς η συνάρτηση $Y = F(K, L)$ θα είναι ομογενής με βαθμό ομογένειας ρ εάν εκπληροί την συνθήκη

$$F(\lambda K, \lambda L) = \lambda^{\rho} F(K, L) = \lambda^{\rho} Y \,. \tag{33}$$

Η συνθήκη αυτή επιδέχεται την διάκριση τριών περιπτώσεων. Εάν η συνάρτηση παραγωγής $Y = F(K, L)$ είναι ομογενής **πρώτου βαθμού** (ρ=1), τότε ο διπλασισμός, ο τριπλασιασμός κ.ο.κ. των συντελεστών παραγωγής Κ και L θα συνεπάγεται τον διπλασιασμό, τον τριπλασιασμό κ.ο.κ. του προϊόντος Υ ($\lambda^{\rho} = \lambda$, όταν ρ=1). Εάν όμως ο βαθμός ομογένειας της $Y = F(K, L)$ είναι **μεγαλύτερος της μονάδας** (ρ>1), τότε η αύξηση των συντελεστών παραγωγής Κ και L κατά ένα ορισμένο ποσοστό λ θα έχει ως συνέπεια την αύξηση του προϊόντος Υ κατά ένα ποσοστό μεγαλύτερο του λ ($\lambda^{\rho} > \lambda$, όταν ρ>1). Τελικά, εάν η συνάρτηση $Y = F(K, L)$ είναι ομογενής με βαθμό ομογένειας **μικρότερο της μονάδας** (ρ<1), τότε η αύξηση των συντελεστών παραγωγής Κ και L κατά ένα ποσοστό λ θα οδηγήσει σε μια αύξηση της παραγωγής Υ κατά ένα ποσοστό που θα είναι μικρότερο του λ ($\lambda^{\rho} < \lambda$, όταν ρ<1). Στο σημείο αυτό υπενθυμίζουμε ότι στην οικονομική ανάλυση χρησιμοποιούμε την παραδοχή περί ομογένειας της συνάρτησης παραγωγής προκειμένου να χειρισθούμε αναλυτικά την έννοια των **αποδόσεων κλίμακας**. Έτσι λέμε πως η συνάρτηση παραγωγής $Y = F(K, L)$ χαρακτηρίζεται από **σταθερές**, **αύξουσες** ή **φθίνουσες** αποδόσεις κλίμακας ανάλογα με το εάν ο βαθμός ομογένειας της $Y = F(K, L)$ είναι ίσος, μεγαλύτερος ή μικρότερος της μονάδας.

Οι ομογενείς συναρτήσεις, και ιδιαίτερα οι γραμμικά ομογενείς, έχουν ορισμένες ιδιότητες, οι οποίες αποδεικνύονται πολύ βολικές για την μαθηματική διατύπωση βασικών αξιωμάτων, εννοιών και προτάσεων της νεοκλασικής θεωρίας. Ίσως η πιο σημαντική, είναι η ιδιότητα εκείνη που μας είναι γνωστή με το όνομα **θεώρημα Euler**. Σύμφωνα με το θεώρημα αυτό, εάν μια συνεχής πλειομεταβλητή συνάρτηση, π.χ. η συνάρτηση παραγωγής $Y = F(K, L)$, είναι ταυτόχρονα και ομογενής με βαθμό ομογένειας ρ, τότε θα πρέπει να ισχύει η σχέση

$$F_K K + F_L L = \rho F(K, L) = \rho Y \,, \tag{34}$$

όπου $F_K(K, L)$ και $F_L(K, L)$ οι μερικές παράγωγοι της $Y = F(K, L)$ ως προς Κ και ως προς L ή, σε νεοκλασική ορολογία, τα οριακά προϊόντα των συντελεστών παραγωγής κεφάλαιο και εργασία. Ας σημειωθεί ότι η σχέση 34 προκύπτει αμέσως από τον ορισμό 33, εάν παραγωγίσουμε τον ορισμό αυτό ως προς λ και εάν στο τελικό αποτέλεσμα θέσουμε αυθαίρετα λ=1, πράγμα που δικαιούμεθα να κάνουμε καθότι ο ορισμός 33 καθώς και το αποτέλεσμα της παραγώγισής του ισχύουν για οποιαδήποτε τιμή του λ.

Μια δεύτερη ιδιότητα των ομογενών συναρτήσεων που θα αποδειχθεί και αυτή αρκετά χρήσιμη στο πλαίσιο της νεοκλασικής θεωρίας έχει ως εξής: εάν μια πλειομεταβλητή συνάρτηση, π.χ. η συνάρτηση παραγωγής $Y = F(K, L)$, είναι ομογενής με βαθμό ομογένειας ρ, τότε η συνάρτηση αυτή μπορεί να διατυπωθεί εναλλακτικά κατά τους ακόλουθους τρεις διαφορετικούς αλλά αναλυτικά **ισοδύναμους** τρόπους:

$$
\begin{aligned}
&(\alpha)\ Y = L^{\rho} F\left(\frac{K}{L}, 1\right) \equiv L^{\rho} f\left(\frac{K}{L}\right) \\
&(\beta)\ Y = K^{\rho} F\left(1, \frac{L}{K}\right) \equiv K^{\rho} \varphi\left(\frac{L}{K}\right) \qquad (35) \\
&(\gamma)\ Y^{1-\rho} = F\left(\frac{K}{Y}, \frac{L}{Y}\right).
\end{aligned}
$$

Παρά το γεγονός ότι και οι τρεις αυτές εναλλακτικές μορφές της συνάρτησης $Y = F(K, L)$ φαίνονται να είναι κάπως περίπλοκες, συνάγονται απευθείας από την ίδια την έννοια των ομογενών συναρτήσεων, δηλαδή από τον ορισμό 33. Επειδή ο ορισμός αυτός ισχύει για οποιαδήποτε τιμή του λ, θα ισχύει προφανώς και για τις τιμές $\lambda = 1/L$, $\lambda = 1/K$ και $\lambda = 1/Y$. Από την διαδοχική αντικατάσταση των τριών αυτών τιμών του λ στον ορισμό 33 προκύπτουν αμέσως οι τρεις εκφράσεις της 35, όπου για λόγους σύντμησης του συναρτησιακού συμβολισμού θέτουμε $F(K/L, 1) \equiv f(K/L)$ και $F(1, L/K) \equiv \varphi(L/K)$.

Οι ιδιότητες 34 και 35 φαίνονται αρχικά να μην είναι τίποτε άλλο παρά κάποιες στρυφνές μαθηματικές εκφράσεις, των οποίων η σημασία παραμένει εγκλωβισμένη στο πλαίσιο της θεωρίας των συναρτήσεων και του διαφορικού λογισμού. Στις επόμενες σελίδες θα διαπιστώσουμε όμως ότι οι εκφράσεις αυτές απλουστεύονται κατά πολύ και ότι αποκτούν κεντρική οικονομική σημασία στο πλαίσιο της νεοκλασικής θεωρίας, την στιγμή που υποτεθεί ότι αυτές αναφέρονται σε μια διπλά παραγωγίσιμη και κυρτή συνάρτηση παραγωγής $Y = F(K, L)$, η οποία είναι επιπλέον και **γραμμικά ομογενής** (ρ=1). Στην §4.5.β. θα επικεντρώσουμε την προσοχή μας στην ιδιότητα 34 και θα δείξουμε, μέσω της ιδιότητας αυτής, ότι μόνον υπό την προϋπόθεση πως η μακροοικονομική συνάρτηση παραγωγής $Y = F(K, L)$ είναι γραμμικά ομογενής (σταθερές αποδόσεις κλίμακας) μπορεί να συνδεθεί η νεοκλασική θεωρία της **παραγωγής** του συνολικού προϊόντος Y με την νεοκλασική θεωρία της **διανομής** του συνολικού εισοδήματος που δημιουργείται κατά την παραγωγή του προϊόντος Y. Και ακόμα περισσότερο, ότι μόνον υπό την προϋπόθεση αυτή διασφαλίζονται οι όροι για την ισχύ της παραδοχής περί **τέλειου ανταγωνισμού**, μιας παραδοχής βάσει της οποίας συντελείται η νεοκλασική υπαγωγή της θεωρίας της παραγωγής και της θεωρίας της διανομής σε μια ενιαία ερμηνευτική αρχή, την αρχή της οριακής παραγωγικότητας. Με την δεύτερη ιδιότητα των ομογενών συναρτήσεων θα ασχοληθούμε στην §4.5.γ.. Εκεί θα δείξουμε ότι, στην περίπτωση της γραμμικής ομογένειας, η ιδιότητα 35 μας προσφέρει την δυνατότητα να αναδιατυπώσουμε την συνάρτηση παραγωγής $Y = F(K, L)$ σε «εντατικούς» όρους, δίνοντάς της την μορφή μιας συνάρτησης που θα έχει μόνο μία ανεξάρτητη μεταβλητή. Όπως αφήσαμε να υπονοηθεί και προηγουμένως, όταν μιλούσαμε για τα όρια της γραφικής απεικόνισης της διμεταβλητής συνάρτησης $Y = F(K, L)$ – και όπως θα δούμε λεπτομερέστερα σε λίγο – η **εντατική γραφή** της μακροοικονομικής συνάρτησης παραγωγής $Y = F(K, L)$ διαθέτει το πολύ σοβαρό **πρακτικό πλεονέκτημα** ότι μας επιτρέπει να απεικονίσουμε σε ένα και μόνο δισδιάστατο σχήμα, τόσο την νεοκλασική θεωρία της **παραγωγής** και της **διανομής**, όσο και την νεοκλασική θεωρία της **συσσώρευσης κεφαλαίου** και της **οικονομικής μεγέθυνσης**.

(β) Η γραμμική ομογένεια της $Y = F(K, L)$ και η νεοκλασική μετάβαση από την θεωρία της παραγωγής στην θεωρία της διανομής

Η ιδέα πως η τεχνολογία μιας επιχείρησης (και, ακόμα περισσότερο, μιας οικονομίας στο σύνολό της) είναι δυνατό να περιγραφεί αναλυτικά μέσω μιας διπλά παραγωγίσιμης, κυρτής και γραμμικά ομογενούς συνάρτησης του τύπου $Y = F(K, L)$ στηρίζεται προφανώς σε ένα απαιτητικότατο τρίπτυχο παραδοχών, οι οποίες είναι αρκετά προβληματικές, τόσο ως προς την εμπειρική επιβεβαίωσή τους όσο και ως προς τις θεωρητικές τους συνέπειες. Παρ' όλ' αυτά, και οι τρεις αυτές παραδοχές υιοθετούνται κατά κανόνα και χωρίς ιδιαίτερους ενδοιασμούς από όλους σχεδόν εκείνους που συνηθίζουν να ερμηνεύουν τα οικονομικά φαινόμενα μέσα από το πρίσμα της νεοκλασικής λογικής. Θα πρέπει ωστόσο να επισημανθεί ότι, για την νεοκλασική ερμηνεία των οικονομικών φαινομένων, δεν είναι απαραίτητα αναγκαίο να υιοθετηθεί η παραδοχή περί γραμμικά ομογενούς τεχνολογίας, στο βαθμό που περιορίζεται κανείς στην θεώρηση μιας επιχείρησης ή ενός κλάδου και εξετάζει την δυνατότητα επίτευξης ισορροπίας σε μία και μόνο αγορά (**θεωρία της μερικής ισορροπίας**). Όμως, η υιοθέτηση της παραδοχής αυτής γίνεται επιτακτική για την νεοκλασική αντίληψη των πραγμάτων, όταν εξετάζεται η δυνατότητα επίτευξης ισορροπίας, στατικής και δυναμικής, στο σύνολο των αγορών, δηλαδή στο σύνολο της οικονομίας. Τούτο ισχύει, τόσο για την πιο εκλεπτισμένη μορφή της νεοκλασικής θεωρίας που είναι η θεωρία της ταυτόχρονης ισορροπίας ενός απροσδιόριστα μεγάλου αριθμού n διαφορετικών αγορών (**θεωρία της γενικής ισορροπίας**), όσο και την συμπυκνωμένη εκδοχή της τελευταίας (**θεωρία της μακροοικονομικής ισορροπίας**), όπου οι n διαφορετικές αγορές του υποδείγματος της γενικής ισορροπίας «αθροίζονται» σε έναν σχετικά μικρό αριθμό «ομοειδών» αγορών.

Ο πιο σύντομος δρόμος για να παρουσιάσουμε την νεοκλασική μετάβαση από την θεωρία της παραγωγής στην θεωρία της διανομής είναι να χρησιμοποιήσουμε το σχήμα του «**οικονομικού κυκλώματος**», του οποίου την μακροοικονομική παραλλαγή την βρίσκουμε πάντοτε στα πρώτα κεφάλαια κάθε εγχειριδίου εισαγωγής στην Μακροοικονομική Θεωρία[23]. Πρόκειται για μια απλουστευτική αλλά χρήσιμη κατασκευή που φιλοδοξεί να καταγράψει σχηματικά, από την σκοπιά της νεοκλασικής θεωρίας, την βασική δομή και τον τρόπο με τον οποίο λειτουργεί η οικονομία μιας **κοινωνίας της αγοράς** (ή, αλλιώς, μιας αστικής ή καπιταλιστικής κοινωνίας). Η δομή μιας τέτοιας οικονομίας, αρχικά χωρίς δημόσιο τομέα και χωρίς διεθνές εμπόριο, περιλαμβάνει (βλ. σχήμα 15) τρεις πόλους ή τομείς (τα «νοικοκυριά», τις «επιχειρήσεις» και τον «χρηματοπιστωτικό» τομέα) καθώς και τέσσερα είδη αγορών: τις αγορές των δύο συντελεστών παραγωγής φυσικό κεφάλαιο K και εργατικό δυναμικό L, την αγορά του συνολικού προϊόντος Y που προκύπτει από τον παραγωγικό συνδυασμό των συντελεστών παραγωγής K και L και, τελικά, την αγορά χρηματικού κεφαλαίου. Για να απεικονισθεί και ο τρόπος με τον οποίο λειτουργεί και αναπαράγεται διαχρονικά η οικονομική δομή της κοινωνίας, σχεδιάζονται επίσης και δύο κυκλώματα, τα οποία συνδέουν, μέσω του συστήματος των τεσσάρων αγορών, τους τρεις τομείς της οικονομίας. Επειδή τα δύο αυτά κυκλώματα καταγράφουν τις ποσότητες των «πραγμάτων» και τις ποσότητες των «χρημάτων» που μεταφέρονται από τον ένα τομέα στον άλλον στην διάρκεια μιας ορισμένης χρονικής περιόδου, τους δίνονται, αντίστοιχα, τα ονόματα: το **κύκλωμα των πραγματικών ροών** και το **κύκλωμα των χρηματικών ροών**.

Όταν κοιτάζουμε τον πόλο **«νοικοκυριά»** στο σχήμα 15, θα πρέπει να φανταζόμαστε ότι εκεί κατοικούν όλοι οι άνθρωποι που ζουν και δραστηριοποιούνται στους διάφορους χώρους της κοινωνίας. Επειδή όμως πρόκειται για μια κοινωνία της αγοράς, στην οποία έχει ιστορικά επιβληθεί η γενικευμένη ισχύς του θεσμού της **ατομικής ιδιοκτησίας** θα πρέπει να φανταζόμαστε ότι **όλοι** οι κάτοικοι του πόλου «νοικοκυριά» εμφανίζονται και δρουν με την μορφή του κυρίαρχου και αυτοτελούς προσώπου. Δηλαδή με την μορφή του ανεξάρτητου **ατόμου**, στο οποίο έχει αναγνωρισθεί το αποκλειστικό δικαίωμα **κατοχής** και **χρήσης** (το **δικαίωμα κυριότητας**) πάνω στον ίδιο τον **εαυτό** του καθώς και στα πράγματα της δικής του **ιδιοκτησίας** («φυσικά» πρόσωπα δικαίου)[24]. Το γεγονός ότι όλα τα μέλη της κοινωνίας εμφανίζονται και δρουν με την διττή ιδιότητα του **ατόμου-ιδιοκτήτη** σημαίνει πως ο καθένας τους είναι **υποχρεωμένος** να αναγνωρίζει και να μην προσβάλλει, με δόλο ή με βία, την **ελευθερία** του άλλου να

---

[23] Βλ. π.χ.: **N.G. Mankiw**, Μακροοικονομική Θεωρία, Αθήνα 1999, Κεφ. 2 (σχήμα 2.1) και Κεφ. 3 (σχήμα 3.1) ή **W.H. Branson – J.M. Litwack**, Μακροοικονομική Θεωρία, Αθήνα 1922, Κεφ. 2 (σχήμα 2.1).

[24] Είναι προφανές, ότι στον προσδιορισμό του δικαιώματος της ατομικής ιδιοκτησίας δεν παίζει κανέναν ρόλο, ούτε το **είδος** της ιδιοκτησίας που κάθε άνθρωπος έχει το δικαίωμα να κατέχει (π.χ. γη, σπίτια, ρούχα, εργοστάσια, φάρμακα ή βιβλία), μα ούτε και το **μέγεθός** της, το οποίο μπορεί στην πραγματικότητα να είναι σχεδόν μηδέν ή και πάρα πολύ μεγάλο. Το γεγονός ότι όλοι οι άνθρωποι θεωρούνται αυτοδικαίως «φυσικά» πρόσωπα κοινωνίας και ότι όλοι τους κατέχουν το δικαίωμα να είναι ιδιοκτήτες, δεν συνεπάγεται, για κανέναν τους, ότι **δικαιούται** να έχει στην κατοχή του τα διάφορα πράγματα που είναι απαραίτητα για την φυσική συντήρησή του, ούτε τα διάφορα άλλα πράγματα που είναι αναγκαία για την ανθρώπινη αξιοπρέπειά του και την ανάπτυξη της προσωπικότητάς του. Το γεγονός, ότι όλοι οι άνθρωποι είναι μεταξύ τους **ίσοι** με την έννοια ότι όλοι τους κατέχουν το δικαίωμα να είναι ιδιοκτήτες, δεν αποκλείει την δυνατότητα, τα πράγματα που κατέχουν οι περισσότεροί τους να είναι πολύ λίγα, τόσο σε σχέση με τις διάφορες προσωπικές και κοινωνικές τους ανάγκες, όσο και σε σχέση με τα πράγματα που βρίσκονται στην ιδιοκτησία των υπολοίπων.

κάνει ό,τι ο ίδιος θέλει με τον εαυτό του και με τα ιδιοκτησιακά του στοιχεία[25]. Στην περίπτωση π.χ. όπου ο Α επιθυμεί να αποκτήσει ένα πράγμα Χ που ανήκει στον Β, ή στην περίπτωση που επιθυμεί να το χρησιμοποιήσει για ένα ορισμένο χρονικό διάστημα Τ, τότε ο Α είναι υποχρεωμένος να αποσπάσει την **συγκατάθεση** του Β, προσφέροντάς του ως **αντάλλαγμα** ένα άλλο πράγμα Ψ από την δική του ιδιοκτησία. Εάν οι Α και Β συμφωνήσουν, τότε υπογράφεται μεταξύ τους μια **σύμβαση** που επικυρώνει την αμοιβαία **ανταλλαγή δικαιωμάτων**. Στην πρώτη περίπτωση ο Α αποκτά το δικαίωμα κυριότητας πάνω στο πράγμα Χ, ενώ ο Β αποκτά το δικαίωμα κυριότητας πάνω στο πράγμα Ψ (σύμβαση **αγοραπωλησίας**). Στην δεύτερη περίπτωση ο Β αποκτά το δικαίωμα κυριότητας πάνω στο πράγμα Ψ, ενώ ο Α αποκτά το δικαίωμα προσωρινής χρήσης του πράγματος Χ, το οποίο, ωστόσο, εξακολουθεί να παραμένει στην κυριότητα του Β, επιστρέφοντας σε αυτόν μετά την πάροδο της περιόδου Τ (σύμβαση **εκμίσθωσης πραγμάτων**). Το ίδιο ισχύει, βέβαια, και στην περίπτωση στην οποία ο Α ζητά από τον Β (και ο Β συμφωνεί με το αίτημα του Α) να του εκχωρήσει, έναντι ανταλλάγματος, το δικαίωμα χρήσης του εργατικού του δυναμικού για ένα ορισμένο χρονικό διάστημα (σύμβαση **εκμίσθωσης εργασίας**). Με την σύμβαση αυτή ο Β θέτει στην διάθεση του Α τις φυσικές του δυνάμεις, τις γνώσεις του και τις δεξιότητές του και αναλαμβάνει την υποχρέωση να ξοδέψει ένα ορισμένο χρονικό διάστημα της ζωής του, εκτελώντας με δική του ευθύνη και για λογαριασμό του Β τις όποιες δραστηριότητες αυτός του υποδείξει.

Κοιτάζοντας, λοιπόν, τον πόλο «νοικοκυριά» στο σχήμα 15 θα πρέπει να φανταζόμαστε ότι εκεί βρίσκονται «συναθροισμένα» όλα τα φυσικά πρόσωπα της κοινωνίας. Την στιγμή που τα παρατηρούμε, θα πρέπει να φανταζόμαστε ότι όλα αυτά τα άτομα-ιδιοκτήτες έχουν στην διάθεσή τους έναν συνολικό χρόνο ζωής Ω και ότι κατέχουν και ένα συνολικό απόθεμα ιδιοκτησιακών στοιχείων V, το οποίο αποτελεί και το συνολικό απόθεμα υλικού πλούτου της κοινωνίας. Χρησιμοποιώντας ως μοναδικό κριτήριο για την κοινωνική δραστηριοποίησή τους την **μεγιστοποίηση της ατομικής τους ωφέλειας**, που μας δίνεται από την αθροιστική συνάρτηση ατομικών προτιμήσεων $U = F(E, G)$, τα νοικοκυριά καθορίζουν, ανάλογα με τα ανταλλάγματα που τους προσφέρονται στην αγορά (τιμές), τρία πράγματα. Πρώτον, την κατανομή του συνολικά διαθέσιμου χρόνου τους Ω σε χρόνο προς ιδίαν χρήση Ε («ελεύθερος χρόνος», «σχόλη») και σε χρόνο μισθωτής εργασίας L, στην διάρκεια του οποίου είναι διατεθειμένα να εργασθούν για λογαριασμό των επιχειρήσεων (**προσφορά εργασίας** L^s). Δεύτερον, την κατανομή του συνολικού υλικού τους πλούτου V σε αντικείμενα προσωπικής (κα-

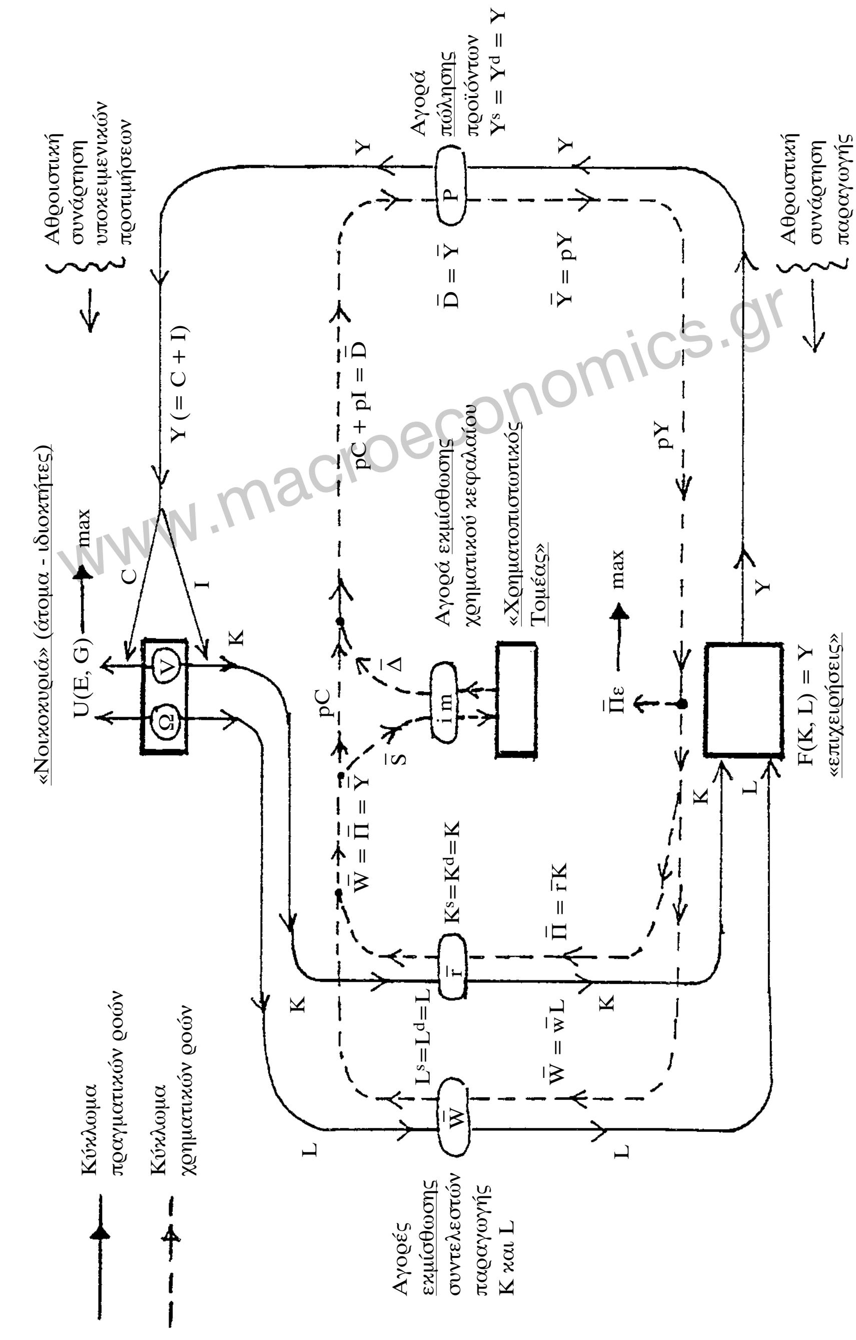
---

[25] Πίσω από την υποχρέωση αυτή κρύβεται, βέβαια, η παρουσία μιας «εξωτερικής» ως προς την κοινωνία των ατόμων δύναμης, μιας **κρατικής εξουσίας**, η οποία ανακηρύσσει σε **αξιόποινη** πράξη κάθε προσπάθεια προσβολής των δικαιωμάτων που συνεπάγεται η ιδιότητα του κυρίαρχου ατόμου και η ιδιότητα του ιδιοκτήτη, που είναι ιδιότητες τις οποίες απονέμει και εγγυάται η ίδια η κρατική εξουσία. Ο διαχωρισμός αυτός μεταξύ κράτους και κοινωνίας θέτει το ζήτημα της **νιμιμοποίησης** της κρατικής εξουσίας, παραπέμποντας στην **πολιτική** και την **συνταγματική** συγκρότηση της κοινωνίας (διάκριση εξουσιών, κοινοβουλευτισμός κλπ.).

ταναλωτικής) χρήσης G, που συμβάλλουν, μαζί με τον ελεύθερο χρόνο τους E, στην υποκειμενική ευχαρίστησή τους U, και σε αντικείμενα παραγωγικής χρήσης K, που τα προσφέρουν προσωρινά προς εκμίσθωση στις επιχειρήσεις (**προσφορά φυσικού κεφαλαίου** K^s). Και τρίτον, την ποσότητα των νέων ιδιοκτησιακών στοιχείων που θα θελήσουν να αγοράσουν από τις επιχειρήσεις (**ζήτηση προϊόντων** Y^d) προκειμένου να τα προσθέσουν στα αποθέματα V που ήδη κατέχουν, αυξάνοντας έτσι το επίπεδο της τρέχουσας και της μελλοντικής ευχαρίστησής τους.

Για τους κατοίκους του πόλου **«επιχειρήσεις»** στο σχήμα 15 ισχύουν, σύμφωνα με την νεοκλασική θεωρία, τα ίδια που ισχύουν και για τους κατοίκους του πόλου «νοικοκυριά». Οι επιχειρήσεις είναι και αυτές κυρίαρχα πρόσωπα δικαίου (όχι βέβαια φυσικά αλλά νομικά), τα οποία, όπως και τα νοικοκυριά, εμφανίζονται στην κοινωνία και δρουν με την μορφή του ανεξάρτητου και αυτοτελούς **ιδιοκτήτη**. Όντας κάτοχοι της διαθέσιμης τεχνολογίας που εκφράζεται από την αθροιστική συνάρτηση παραγωγής $Y = F(K, L)$, οι επιχειρήσεις έχουν την δυνατότητα να προκαλέσουν, με δική τους πρωτοβουλία και μόνον, τον παραγωγικό συνδυασμό διαφόρων ποσοτήτων εργατικού δυναμικού και υλικών στοιχείων πλούτου που ανήκουν στα νοικοκυριά. Αποτέλεσμα αυτής της ελεύθερης πρωτοβουλίας των επιχειρήσεων είναι να εμφανιστούν στην κοινωνία νέα στοιχεία πλούτου (προϊόντα). Αν και αυτά τα νέα στοιχεία πλούτου ανήκουν στις επιχειρήσεις, αυτές δεν επιθυμούν καθόλου να τα διατηρήσουν στην δική τους ιδιοκτησία αλλά σκοπεύουν να τα πουλήσουν στα νοικοκυριά. Η μοναδική δύναμη που ωθεί τις επιχειρήσεις να εμφανίζονται στην αγορά και να επιδιώκουν την εκμίσθωση συντελεστών παραγωγής (**ζήτηση φυσικού κεφαλαίου** K^d και **ζήτηση εργασίας** L^d), προσφέροντας ταυτόχρονα προς πώληση και το προϊόν του παραγωγικού συνδυασμού των συντελεστών παραγωγής (**προσφορά συνολικού προϊόντος** Y^s) είναι η **μεγιστοποίηση** του **επιχειρηματικού κέρδους** $\overline{\Pi}_{\varepsilon}$.

Επειδή η έννοια του επιχειρηματικού κέρδους μας παραπέμπει στο κύκλωμα των χρηματικών ροών στο σχήμα 15, θα θέλαμε να τελειώσουμε την παρουσίαση του κυκλώματος των πραγματικών ροών, κάνοντας κάποιες τελικές παρατηρήσεις. Είπαμε προηγουμένως ότι, υπό την ώθηση **δύο διαφορετικών δυνάμεων** – την μεγιστοποίηση της ατομικής ωφέλειας και την μεγιστοποίηση του επιχειρηματικού κέρδους – τα νοικοκυριά και οι επιχειρήσεις εμφανίζονται ταυτόχρονα στις δύο αγορές εκμίσθωσης συντελεστών παραγωγής καθώς και στην αγορά τελικών προϊόντων, προσπαθώντας, μέσω αμοιβαίων ανταλλαγών, να ικανοποιήσουν, όσο καλύτερα μπορούν, το προσωπικό τους συμφέρον. Το κεντρικό επιχείρημα της νεοκλασικής θεωρίας είναι ότι, υπό συνθήκες **τέλειου ανταγωνισμού**, οι ταυτόχρονες διαπραγματεύσεις και στις τρεις αγορές θα οδηγήσουν τελικά στην εξισορρόπησή τους (γενική ισορροπία). Οι τιμές που θα διαμορφωθούν θα εξισώνουν την συνολικά προσφερόμενη με την συνολικά ζητούμενη ποσότητα σε κάθε αγορά και θα εγγυώνται ταυτόχρονα ότι οι ποσότητες που θα ανταλλαχθούν στις τιμές αυτές θα είναι και οι ποσότητες εκείνες που μεγιστοποιούν την ατομική



Σχήμα 15: Η νεοκλασική εκδοχή του οικονομικού κυκλώματος.

ωφέλεια των νοικοκυριών καθώς και το μέγεθος των επιχειρηματικών κερδών (αποτελεσματικότητα κατά Pareto). Όμως, αυτές οι τόσο ευεργετικές επιπτώσεις του τέλειου ανταγωνισμού για το σύνολο της κοινωνίας πραγματώνοντια, σύμφωνα με την νεοκλασική θεωρία, μόνο υπό τον **όρο** ότι πρόκειται για μια κοινωνία αμέτρητα **πολλών** και πολύ **μικρών** ιδιοκτητών.

Αν και όλα τα νοικοκυριά κατέχουν το δικαίωμα της **ελεύθερης πρόσβασης** σε όλες τις **αγορές**[26], η ατομική ιδιοκτησία του καθενός είναι τόσο μικρή σε σχέση με την συνολική ιδιοκτησία όλων των άλλων (που είναι αμέτρητα πολλοί), ώστε να μην υπάρχει κανείς που να βρίσκεται σε προνομιακή θέση να μπορεί να επηρεάζει, μέσω του μεγέθους της ατομικής του προσφοράς και της ατομικής του ζήτησης, την τιμή στην οποία θα εξισορροπηθεί σε κάθε αγορά η συνολική προσφορά με την συνολική ζήτηση. Για όλα τα νοικοκυριά οι τιμές αποτελούν δοσμένες **παραμέτρους** και το μόνο που μπορούν να κάνουν είναι να προσαρμόζουν στις δοσμένες αυτές τιμές τις ατομικές τους προσφορές και ζητήσεις. Αυτή η **παραμετρική** ως προς τις τιμές **συμπεριφορά** των νοικοκυριών υποτίθεται ότι ισχύει και στην περίπτωση των επιχειρήσεων. Όλες τους κατέχουν το δικαίωμα της ελεύθερης πρόσβασης σε κάθε αγορά, όμως όλες τους είναι τόσο μικρές και ο αριθμός τους είναι τόσο μεγάλος, ώστε και για αυτές θα πρέπει να ισχύει ότι οι τιμές αποτελούν δοσμένες παραμέτρους. Για να μπορούν να αξιοποιούν το δικαίωμα της ελεύθερης πρόσβασης στις αγορές, όλες αυτές οι πάρα πολλές και πολύ μικρές επιχειρήσεις θα πρέπει επίσης να κατέχουν και το δικαίωμα της **ελεύθερης πρόσβασης** στην διαθέσιμη **τεχνολογία** $Y = F(K, L)$. Το τι ακριβώς συνεπάγεται η **κοινή κατοχή** του δικαιώματος αυτού μπορούμε να το διευκρινίσουμε με την βοήθεια ενός απλού παραδείγματος. Ας υποθέσουμε πως όλες οι επιχειρήσεις που λειτουργούν στην οικονομία παράγουν, βάσει των δοσμένων τιμών που επικρατούν στις διάφορες αγορές, ένα συνολικό προϊόν ίσο με Y_α, χρησιμοποιώντας για τον σκοπό αυτό την πιο αποδοτική τεχνική που τυχαίνει να απαιτεί την εκμίσθωση K_α μονάδων κεφαλαίου και L_α μονάδων εργασίας: $Y_\alpha = F(K_\alpha, L_\alpha)$. Η γενική ισχύς του δικαιώματος της ελεύθερης πρόσβασης στις αγορές προϋποθέτει ότι μια νέα επιχείρηση έχει την δυνατότητα να ιδιοποιηθεί, **χωρίς κόστος**, την διαθέσιμη τεχνολογία $Y = F(K, L)$ και να την χρησιμοποιήσει για να εισέλθει και αυτή στην αγορά του προϊόντος Y και να αυξήσει την συνολική προσφορά Y_α κατά ένα μικρό ποσό μY_α ($\mu>0$), αφήνοντας βέβαια, λόγω τέλειου ανταγωνισμού, ανεπηρέαστες τις δοσμένες τιμές στις οποίες ισορροπούν οι διάφορες αγορές. Επειδή όμως δεν την συμφέρει να επιλέξει καμία άλλη τεχνική εκτός από την

---

[26] Ελεύθερη πρόσβαση σε όλες τις αγορές σημαίνει ότι όλα τα άτομα έχουν την ελευθερία να συμμετέχουν ή και να μην συμμετέχουν στις αγορές. Στην περίπτωση που θεωρούν ότι με την συμμετοχή τους δεν πρόκειται να βελτιωθεί η κατάστασή τους, τότε έχουν την ελευθερία να μην συνάψουν καμία ανταλλακτική σχέση. Τούτο όμως προϋποθέτει (γεγονός που η νεοκλασική θεωρία αγνοεί) ότι η **αρχική ιδιοκτησία** τους είναι αρκετά μεγάλη, ώστε να τους επιτρέπει να επιβιώνουν εκτός αγοράς. Διαφορετικά, η **ελευθερία** πρόσβασης στην αγορά αντισρέφεται και μετατρέπεται σε **αναγκαιότητα** πρόσβασης στην αγορά.

πιο αποδοτική που είναι η τεχνική που έχουν ήδη επιλέξει και εξακολουθούν να χρησιμοποιούν οι άλλες επιχειρήσεις (δηλαδή την τεχνική $(K_\alpha, L_\alpha) \to Y_\alpha$), η αύξηση της συνολικής προσφοράς κατά το ποσό μY_α θα πρέπει να συνοδευθεί από μια αύξηση της ζήτησης του συντελεστή παραγωγής K κατά το ποσό μK_α και του συντελεστή L κατά το ποσό μL_α. Μετά την είσοδο της νέας επιχείρησης στην αγορά, η συνολική προσφορά θα ισούται με $Y_\alpha + \mu Y_\alpha = (1+\mu)Y_\alpha$, ενώ η συνολική ζήτηση για τους συντελεστές παραγωγής K και L θα διαμορφωθεί, αντίστοιχα, στα επίπεδα $K_\alpha + \mu K_\alpha = (1+\mu)K_\alpha$ και $L_\alpha + \mu L_\alpha = (1+\mu)L_\alpha$. Στο σημείο αυτό θα πρέπει να υπογραμμισθεί το γεγονός ότι, πριν από την είσοδο της νέας επιχείρησης στην αγορά, η διαθέσιμη τεχνολογία $Y = F(K,L)$ επέτρεπε τον παραγωγικό συνδυασμό $F(K_\alpha, L_\alpha) = Y_\alpha$ και ότι τώρα, μετά την είσοδο της νέας επιχείρησης, η ίδια τεχνολογία επιτρέπει τον παραγωγικό συνδυασμό

$$F\big((1+\mu)K_\alpha, (1+\mu)L_\alpha\big) = (1+\mu)Y_\alpha .$$

Συσχετίζοντας το γεγονός αυτό με τα όσα συνεπάγεται ο ορισμός 33, καταλήγουμε στο ακόλουθο κεντρικής σημασίας συμπέρασμα. Η τυπική ισχύς των βασικών αξιωμάτων της νεοκλασικής θεωρίας (**ισότητα** δικαιωμάτων, **ελευθερία** πρόσβασης στις αγορές και **τέλειος ανταγωνισμός**) στηρίζεται στην παραδοχή ότι η διαθέσιμη τεχνολογία $Y = F(K,L)$ είναι **γραμμικά ομογενής** (σταθερές αποδόσεις κλίμακας). Τεχνολογίες με αύξουσες ή φθίνουσες αποδόσεις κλίμακας θα πρέπει να θεωρηθούν εκ προοιμίου ότι παραβιάζουν την ισότητα των δικαιωμάτων και την ελευθερία πρόσβασης στις αγορές και ότι δεν είναι συνεπώς συμβατές και με την έννοια του τέλειου ανταγωνισμού.

Ας επανέλθουμε τώρα στις τρεις αγορές που μεσολαβούν στο σχήμα 15 την κίνηση των πραγματικών ροών μεταξύ των νοικοκυριών και των επιχειρήσεων. Όπως είπαμε πριν από λίγο, το κεντρικό επιχείρημα της νεοκλασικής θεωρίας είναι ότι, υπό συνθήκες τέλειου ανταγωνισμού, οι **ταυτόχρονες** διαπραγματεύσεις και στις τρεις αγορές θα οδηγήσουν στην **εξισορρόπησή** τους, πράγμα που σημαίνει ότι σε κάθε αγορά θα διαμορφωθεί τελικά μια χρηματική τιμή που θα επιφέρει την ισότητα μεταξύ της συνολικής προσφοράς και της συνολικής ζήτησης (ή, ακριβέστερα, μεταξύ συνολικά προσφερόμενης και συνολικά ζητούμενης ποσότητας)[27]. Η εξισορρόπηση της αγοράς εκμίσθωσης εργασίας στο επίπεδο L ($L^s = L^d = L$) συνεπάγεται ότι ορισμένα νοικοκυριά δεσμεύονται να εργασθούν στους χώρους των επιχειρήσεων για ένα προκαθορισμένο χρονικό διάστημα, ενώ οι επιχειρήσεις τους δίνουν ως αντάλλαγμα ένα ορισμένο χρη-

[27] Η ορθότητα του επιχειρήματος αυτού είναι κάθε άλλο παρά αυτονόητη. Το γεγονός, ότι οι επιχειρήσεις και τα νοικοκυριά εμφανίζονται **ταυτόχρονα** στις διάφορες αγορές και προσπαθούν να διαπραγματευθούν όρους ανταλλαγής που θα βελτιώσουν την αρχική τους θέση, σημαίνει πως η οικονομία βρίσκεται αρχικά σε κατάσταση **ανισορροπίας**. Εάν θα ισορροπήσει ποτέ ή όχι, είναι ένα ερώτημα που απασχόλησε την νεοκλασική θεωρία ήδη από τα πρώτα χρόνια της ίδρυσής της (Walras, Marshall) και το οποίο εξακολουθεί να την απασχολεί, χωρίς να έχει καταλήξει σε μια απάντηση που να είναι, από άποψη οικονομικού περιεχομένου, πειστική (Βλ. **W. Nicholson**, Μικροοικονομική Θεωρία, Αθήνα 1998, Κεφ. 17).

ματικό ποσό $\overline{w}$, το οποίο ονομάζεται, ανάλογα με την βάση υπολογισμού του, άλλοτε **ωρομίσθιο**, άλλοτε **ημερομίσθιο** και άλλοτε, απλώς **μισθός**. Αντίστοιχα, η εξισορρόπηση της αγοράς εκμίσθωσης φυσικού κεφαλαίου στο επίπεδο K ($K^s = K^d = K$) θα έχει ως συνέπεια την δέσμευση των νοικοκυριών να θέσουν στην διάθεση των επιχειρήσεων, για μια προκαθορισμένη χρονική περίοδο, ένα ορισμένο απόθεμα φυσικού κεφαλαίου ίσο με K, με αντάλλαγμα την υποχρέωση των επιχειρήσεων να τους μεταβιβάσουν, ανά μονάδα εκμισθούμενου κεφαλαίου, ένα ορισμένο ποσό χρημάτων ίσο με $\overline{r}$. Το ποσό αυτό ονομάζεται συνήθως **πρόσοδος** ή **ενοίκιο** ανά μονάδα περιουσιακού στοιχείου που γίνεται αντικείμενο εκμίσθωσης. Πολλές φορές χρησιμοποιείται στη νεοκλασική βιβλιογραφία και ο όρος **ποσοστό κέρδους**, ο οποίος όμως δεν αναφέρεται, όπως θα νόμιζε κανείς, στο επιχειρηματικό κέρδος αλλά στο εισόδημα που αποκτούν τα νοικοκυριά όταν εκμισθώνουν περιουσιακά τους στοιχεία σε τρίτους. Τελικά, η εξισορρόπηση στην αγορά προϊόντων μεταξύ προσφοράς και ζήτησης στο επίπεδο Y ($Y^s = Y^d = Y$) θα συνοδεύεται με την διαμόρφωση μιας **ονομαστικής τιμής** p, δηλαδή ενός ορισμένου χρηματικού ποσού p ανά μονάδα προϊόντος, βάσει του οποίου θα μεταβιβασθεί το συνολικό προϊόν Y από την ιδιοκτησία των επιχειρήσεων στην ιδιοκτησία των νοικοκυριών.

Αγοράζοντας όλη την τρέχουσα παραγωγή των επιχειρήσεων, τα νοικοκυριά αποκτούν νέα ιδιοκτησιακά στοιχεία, τα οποία τα προσθέτουν στο αρχικό τους απόθεμα V, αυξάνοντάς το κατά το ποσό Y ($\Delta V = Y$). Βάσει της ωφελιμιστικής τους λογικής που σηματοδοτείται στο σχήμα 15 με την καταγραφή της συνάρτησης $U = U(E, G)$, τα νοικοκυριά κατανέμουν τη νέα τους ιδιοκτησία Y σε αντικείμενα καταναλωτικής υφής C και σε αντικείμενα επενδυτικής υφής I ($Y = C + I$). Τα πρώτα θα τα χρησιμοποιήσουν για να αυξήσουν το επίπεδο της κατανάλωσής τους G ($C = \Delta G$), ενώ το τμήμα I θα το προσθέσουν στο απόθεμα μέσων παραγωγής K που ήδη κατέχουν ($I = \Delta K$), προκειμένου να αυξήσουν τα μελλοντικά εισοδήματά τους από προσόδους, διασφαλίζοντας έτσι και την δυνατότητα να αγοράζουν, στο μέλλον, περισσότερα καταναλωτικά αγαθά C και να μειώνουν, ενδεχομένως, και τον χρόνο εργασίας τους L (να αυξάνουν τον ελεύθερο χρόνο τους E). Τελειώνοντας με την περιγραφή του κυκλώματος των πραγματικών ροών στο σχήμα 15, σημειώνουμε ότι οι επιχειρήσεις εμφανίζονται μεν, όπως και τα νοικοκυριά, ως αυτοτελείς μορφές ατομικής ιδιοκτησίας, με την μόνη διαφορά όμως ότι η ιδιοκτησία τους σε υλικά αντικείμενα πλούτου δεν έχει **πάγιο** αλλά μόνον **προσωρινό** χαρακτήρα. Όταν λήξουν οι συμβάσεις εκμίσθωσης των συντελεστών παραγωγής K και L και αυτοί επιστρέψουν στους αρχικούς τους ιδιοκτήτες και όταν πια πωληθεί από τις επιχειρήσεις και το συνολικό προϊόν Y, τότε όλα τα αντικείμενα υλικού πλούτου που υπάρχουν στην κοινωνία (και τα παλαιά και τα νέα, δηλαδή και το απόθεμα μέσων παραγωγής K και το συνολικό προϊόν Y) βρίσκονται στην ιδιοκτησία των νοικοκυριών. Η μόνη δυνατότητα που έχουν οι επιχειρήσεις να διατηρήσουν την ιδιότητα του αυτοτελούς ιδιοκτήτη και να συνεχίσουν να την διατηρούν και στο μέλλον είναι να εμφανισθούν, τελικά, ως ιδιοκτήτες ενός ποσού **χρημάτων**. Ενός ποσού χρημάτων που θα είναι το **επιχειρηματικό κέρδος** $\overline{\Pi}_\varepsilon$, η μεγιστοποίηση του οποίου αποτελεί και τον σκοπό (το τέλος) που δικαιολογεί την ύπαρξη και την λειτουργία των επιχειρήσεων στο πλαίσιο του οικονομικού κυκλώματος.

Με την υπόμνηση αυτή μεταφερόμαστε τώρα στο κύκλωμα των χρηματικών ροών και θέτουμε το ερώτημα: πώς διασφαλίζεται η επιβολή της δύναμης που κινητοποιεί το κύκλωμα αυτό και που είναι η **μεγιστοποίηση** των επιχειρηματικών κερδών $\overline{\Pi}_\varepsilon$; Υπό την προϋπόθεση ότι στην αγορά προϊόντων η συνολική ζήτηση $\overline{D}$ (σε χρηματικούς όρους) απορροφά **εξ ολοκλήρου** την συνολικά προσφερόμενη ποσότητα Y σε μια ορισμένη τιμή p[28], θα ισχύει

$$\overline{D} = \overline{Y}\ (= pY), \tag{36}$$

όπου $\overline{Y} = pY$ η χρηματική αξία της συνολικής **προσφοράς** Y, η οποία θα ισούται ταυτόχρονα και με τα συνολικά **έσοδα** που αποκομίζουν οι επιχειρήσεις από την πώληση της τρέχουσας παραγωγής τους Y. Από την άλλη μεριά, η παραγωγή της συνολικά προσφερόμενης ποσότητας Y απαιτεί την εκμίσθωση K μονάδων φυσικού κεφαλαίου και L μονάδων εργασίας ($Y = F(K,L)$). Τούτο σημαίνει ότι το συνολικό **κόστος παραγωγής** της ποσότητας Y θα ισούται με $\overline{r}K + \overline{w}L$, όπου $\overline{r}$ και $\overline{w}$ οι τιμές εκμίσθωσης των συντελεστών παραγωγής κεφάλαιο και εργασία. Επειδή τα επιχειρηματικά κέρδη $\overline{\Pi}_\varepsilon$ δεν είναι τίποτε άλλο παρά το ποσό των χρημάτων που απομένει στην ιδιοκτησία των επιχειρήσεων μετά αφού αφαιρεθεί από τα έσοδα πώλησης της ποσότητας Y το κόστος παραγωγής της, θα ισχύει εξ ορισμού

$$\overline{\Pi}_\varepsilon = pY - (\overline{r}K + \overline{w}L) \tag{37}$$

ή, διαφορετικά,

$$\overline{\Pi}_\varepsilon = pF(K,L) - (\overline{r}K + \overline{w}L). \tag{37΄}$$

Από την έκφραση αυτή φαίνεται αμέσως ότι υπό συνθήκες τέλειου ανταγωνισμού, όπου οι τιμές p, $\overline{r}$ και $\overline{w}$ θεωρούνται δεδομένες, το μέγεθος των επιχειρηματικών κερδών $\overline{\Pi}_\varepsilon$ εξαρτάται συναρτησιακά μόνον από το μέγεθος των συντελεστών παραγωγής K και L: $\overline{\Pi}_\varepsilon = \overline{\Pi}_\varepsilon(K,L)$. Προκειμένου να μεγιστοποιήσουν τα κέρδη τους, οι επιχειρήσεις θα πρέπει συνεπώς να επιλέξουν από την διαθέσιμη τεχνολογία $Y = F(K,L)$ εκείνον τον συνδυασμό των μεταβλητών K και L, ο οποίος μεγιστοποιεί την διμεταβλητή συνάρτηση 37΄. Επειδή οι αναγκαίες συνθήκες για την μεγιστοποίηση της $\overline{\Pi}_\varepsilon$ είναι $\partial\overline{\Pi}_\varepsilon/\partial K = 0$ και $\partial\overline{\Pi}_\varepsilon/\partial L = 0$, προκύπτει αμέσως από την μερική παραγώγιση της 37΄ ως προς K και ως προς L ότι τα επιχειρηματικά κέρδη μεγιστοποιούνται, όταν η χρηματική αξία του οριακού προϊόντος κάθε συντελεστή παραγωγής θα φτάσει να

[28] Πρόκειται για μια υπόθεση που στην θεωρητική βιβλιογραφία είναι γνωστή με το όνομα **«ο νόμος του Say»** (η συνολική προσφορά δημιουργεί αυτόματα και την συνολική ζήτηση που απαιτείται για να αγορασθεί η συνολική προσφορά). Ας σημειωθεί ότι η κριτική απόρριψη της υπόθεσης αυτής αποτελεί και την αφετηρία για την οικοδόμηση της κεϋνσιανής θεωρίας.

να ισούται με την ονομαστική τιμή εκμίσθωσής του (**αρχή της οριακής παραγωγικότητας**)[29]:

$$pF_K(K,L)=\overline{r},\ pF_L(K,L)=\overline{w}\,. \tag{38}$$

Ας σημειωθεί ότι οι δύο αυτές εκφράσεις αποτελούν ένα σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους (K και L) και τρεις παραμέτρους (p, $\overline{r}$, $\overline{w}$). Η επίλυση του συστήματος αυτού θα μας έδινε τις εκφράσεις $K=K(p,\overline{r},\overline{w})$ και $L=L(p,\overline{r},\overline{w})$, οι οποίες δεν είναι τίποτε άλλο παρά οι συναρτήσεις ζήτησης των συντελεστών παραγωγής K και L, αφού μας δείχνουν ποιες ποσότητες K και L θα ζητούσαν να εκμισθώσουν οι επιχειρήσεις στην περίπτωση όπου στις τελείως ανταγωνιστικές αγορές ίσχυαν οι τιμές p, $\overline{r}$ και $\overline{w}$.

Εισάγωντας τώρα τις συνθήκες 38 στον ορισμό 37΄ διαπιστώνουμε ότι το μέγεθος των επιχειρηματικών κερδών $\overline{\Pi}_\varepsilon$, στην περίπτωση της μεγιστοποίησής τους, θα ισούται με

$$\overline{\Pi}_\varepsilon=pF(K,L)-(pF_K K+pF_L L)=p\big(F(K,L)-(F_K K+F_L L)\big). \tag{39}$$

Στο σημείο αυτό αρχίζει να διαφαίνεται ο κεντρικός ρόλος που διαδραματίζει το θεώρημα Euler 34 για την νεοκλασική μετάβαση από την θεωρία της παραγωγής στην θεωρία της διανομής. Η έκφραση 39 μας δείχνει σαφέστατα τον τρόπο με τον οποίο μια ειδική περίπτωση του θεωρήματος Euler (ρ=1) μπορεί να μετατραπεί – με την μεσολάβηση της αρχής της οριακής παραγωγικότητας καθώς και μιας ιδιότυπης αντίληψης για την φύση της καπιταλιστικής επιχείρησης και των επιχειρηματικών κερδών – από μιαν ιδιότητα ενός ορισμένου είδους μαθηματικών συναρτήσεων (των γραμμικών ομογενών) σε μια θεωρητική πρόταση που φιλοδοξεί να ερμηνεύσει, βάσει μιας ενιαίας λογικής, τόσο την παραγωγή του συνολικού προϊόντος Y όσο και την διανομή του συνολικού εισοδήματος που δημιουργείται κατά την παραγωγή του συνολικού προϊόντος Y. Εάν υποτεθεί ότι είναι δυνατό να ορισθεί, για το σύνολο των επιχειρήσεων που λειτουργούν στην οικονομία, μια μακροοικονομική (αθροιστική) συνάρτηση παραγωγής $Y=F(K,L)$ που θα είναι διπλά παραγωγίσιμη και κυρτή και εάν, επιπλέον, υποτεθεί ότι η συνάρτηση αυτή είναι σταθερών αποδόσεων κλίμακας (ρ=1), δηλαδή γραμμικά ομογενής, τότε η εισαγωγή της έκφρασης 34 (θεώρημα Euler) στην 39 μας οδηγεί στο ακόλουθο σημαντικό συμπέρασμα: η δύναμη που ενεργοποιεί την κίνηση των χρηματικών ροών στο οικονομικό κύκλωμα (βλ. σχήμα 15) και που είναι η **μεγιστοποίηση** των επιχειρηματικών κερδών $\overline{\Pi}_\varepsilon$ καταλήγει τελικά στην αυτοακύρωσή της, αφού αποτέλεσμα της επενέργειάς της είναι ο **μηδενισμός** των επιχειρηματικών κερδών: $\overline{\Pi}_\varepsilon=0$.

---

[29] Βέβαια, οι αναγκαίες συνθήκες 38 δεν διασφαλίζουν από μόνες τους την μεγιστοποίηση των κερδών, αφού μπορεί να σηματοδοτούν και την ελαχιστοποίησή τους. Για τον λόγο αυτό θα πρέπει να ικανοποιούνται ταυτόχρονα και οι ικανές συνθήκες μεγιστοποίησης της 37΄ που είναι $\partial^2\overline{\Pi}_\varepsilon/\partial K^2=pF_{KK}<0$ και $\partial^2\overline{\Pi}_\varepsilon/\partial L^2=pF_{LL}<0$ και οι οποίες ισχύουν μόνον εάν $F_{KK}<0$ και $F_{LL}<0$. Εδώ φαίνεται και η σημασία των παραδοχών περί διπλής παραγωγισιμότητας και κυρτότητας της συνάρτησης $Y=F(K,L)$. Όπως φαίνεται από τις εκφράσεις 22 και 23 οι παραδοχές αυτές διασφαλίζουν την ισχύ τόσο των αναγκαίων συνθηκών ($F_K>0$, $F_L>0$) όσο και την ικανών συνθηκών ($F_{KK}<0$, $F_{LL}<0$) για την μεγιστοποίηση των επιχειρηματικών κερδών $\overline{\Pi}_\varepsilon$.

Στο βαθμό που αποδεχόμαστε όλες τις υποθέσεις στις οποίες στηρίχθηκε ο ισχυρισμός περί μηδενισμού των επιχειρηματικών κερδών, συμπεραίνουμε από την 39 ότι για την χρηματική αξία του συνολικού προϊόντος Y ($=F(K,L)$) θα πρέπει να ισχύει η σχέση

$$pY = pF_K K + pF_L L . \tag{40}$$

Εάν στο σημείο αυτό προστεθεί και η βασική νεοκλασική αρχή σύμφωνα με την οποία η μεγιστοποίηση των επιχειρηματικών κερδών (ανεξάρτητα του μηδενισμού τους) συνεπάγεται, σε συνθήκες τέλειου ανταγωνισμού, την εκμίσθωση των συντελεστών παραγωγής βάσει της αξίας των οριακών τους προϊόντων (βλ. έκφραση 38), τότε η σχέση 40 είναι σε θέση να προσφέρει απαντήσεις στα ακόλουθα δύο ερωτήματα: πρώτον, ποιο είναι το μέγεθος του συνολικού εισοδήματος που δημιουργείται κατά την παραγωγή του συνολικού προϊόντος Y και, δεύτερον, ποιο τμήμα του συνολικού εισοδήματος διανέμεται με την μορφή μισθών και ποιο με την μορφή κερδών; Ας σημειωθεί ότι εδώ ο όρος κέρδη χρησιμοποιείται με την έννοια του μισθώματος, δηλαδή της προσόδου ή του ενοικίου, και όχι με την έννοια των επιχειρηματικών κερδών, των οποίων το μέγεθος έχει ήδη τεθεί, εξ υποθέσεως, ίσο με το μηδέν.

Σε ό,τι αφορά το πρώτο ερώτημα, είναι σαφές ότι το σύνολο των μισθών $\overline{W}(=\overline{w}L)$ θα πρέπει να ισούται με $pF_L L$ και το σύνολο των κερδών $\overline{\Pi}(=\overline{r}K)$ με $pF_K K$. Σαφές είναι επίσης ότι το άθροισμα $pF_K K + pF_L L$ αποτελεί το συνολικό κόστος εκμίσθωσης των συντελεστών παραγωγής K και L και συνεπώς και το κόστος παραγωγής του συνολικού προϊόντος Y ($=F(K,L)$). Από την άλλη μεριά, η παραδοχή περί σταθερών αποδόσεων κλίμακας που εκφράζεται από την σχέση 40 και η οποία εγγυάται τον μηδενισμό των επιχειρηματικών κερδών, εγγυάται ταυτόχρονα και ότι η αξία του συνολικού προϊόντος $pY(=pF(K,L))$ θα εξαντλείται εξ ολοκλήρου στην κάλυψη του κόστους παραγωγής του Y:

$$pY = pF_K K + pF_L L = \overline{r}K + \overline{w}L = \overline{\Pi} + \overline{W} . \tag{41}$$

Όμως, ακριβώς επειδή έχει εκ προοιμίου αποκλεισθεί η δυνατότητα ύπαρξης κάποιου τμήματος της αξίας του συνολικού προϊόντος Y που να μην μπορεί να καταλογισθεί, σύμφωνα με την αρχή της οριακής παραγωγικότητας, ως κόστος εκμίσθωσης ενός συγκεκριμένου συντελεστή παραγωγής που χρησιμοποιείται στην παραγωγή του Y (ή, με άλλα λόγια, ακριβώς επειδή έχει αποκλεισθεί η δυνατότητα ύπαρξης επιχειρηματικών κερδών), είναι αυτονόητο (βλ. έκφραση 41 καθώς και το κύκλωμα των χρηματικών ροών στο σχήμα 15) ότι η **αξία του συνολικού προϊόντος** pY θα ισούται όχι μόνον με το **κόστος παραγωγής** του Y ($=pF_K K + pF_L L$) αλλά και με το **συνολικό εισόδημα** που δημιουργείται, με την μορφή προσόδων και μισθών, κατά την διάρκεια της παραγωγής του συνολικού προϊόντος Y ($=\overline{r}K + \overline{w}L = \overline{W} + \overline{\Pi}$) και το οποίο εισπράττεται εξ ολοκλήρου από τα νοικοκυριά. Αυτή η χαρακτηριστικά νεοκλασική ταύτιση των τριών εννοιών είναι και ο λόγος για τον οποίο δεν χρειάσθηκε προηγουμένως να χρησιμοποιηθούν συμβολικές εκφράσεις διαφορετικές της pY για να συμβολισθούν οι έννοιες του συνολικού κόστους παραγωγής και του συνολικού εισοδήματος[30].

Από την σχέση 40 προκύπτει επίσης και η νεοκλασική απάντηση στο δεύτερο ερώτημα που τέθηκε προηγουμένως σχετικά με την διανομή του συνολικού εισοδήματος pY μεταξύ κερδών και μισθών. Ας συμβολίσουμε με a_{Π} και a_W το μερδίο των κερδών και αντίστοιχα το μερίδιο των μισθών στο συνολικό εισόδημα pY ($a_{\Pi} = \bar{\Pi}/pY$ και $a_W = \bar{W}/pY$). Αφού, σύμφωνα με την αρχή της οριακής παραγωγικότητας, το σύνολο των κερδών (προσόδων) $\bar{\Pi}$ ισούται με $\bar{r}K = pF_K K$ και το σύνολο των μισθών $\bar{W}$ με $\bar{w}L = pF_L L$, είναι αυτονόητο πως το μέγεθος των εισοδηματικών μεριδίων α_{Π} και α_W θα μας δίνεται από τα κλάσματα

$$\alpha_{\Pi} = \frac{pF_K K}{pY} = \frac{F_K K}{Y}, \ \alpha_W = \frac{pF_L L}{pY} = \frac{F_L L}{Y}.$$

Για τα κλάσματα αυτά θα πρέπει ωστόσο να σημειωθεί ότι είναι ταυτόσημα με τους ορισμούς των μερικών ελαστικοτήτων της παραγωγής ε_K και ε_L (βλ. 26):

$$\alpha_{\Pi} = \varepsilon_K = \frac{F_K K}{Y}, \ \alpha_W = \varepsilon_L = \frac{F_L L}{Y}. \tag{42}$$

Από την 42 μπορούμε να διακρίνουμε αμέσως τους παράγοντες που καθορίζουν, από την σκοπιά της νεοκλασικής θεωρίας, ποιο τμήμα του συνολικού εισοδήματος pY θα διανεμηθεί με την μορφή κερδών και ποιο με την μορφή μισθών. Επειδή στην 42 έχει εξαλειφθεί οποιαδήποτε αναφορά σε χρηματικές τιμές και σε χρηματικά μεγέθη, είναι σαφές ότι το μέγεθος των εισοδηματικών μεριδίων α_{Π} και α_W δεν καθορίζεται στο πλαίσιο του κυκλώματος των χρηματικών ροών αλλά εξαρτάται αποκλειστικά και μόνον από τις ιδιότητες της συνάρτησης παραγωγής $Y = F(K, L)$ στο κύκλωμα των πραγματικών ροών. Και αυτό επειδή οι μαθηματικές ιδιότητες της συνάρτησης $Y = F(K, L)$ είναι αυτές που καθορίζουν το μέγεθος των ελαστικοτήτων $\varepsilon_K (= F_K K/Y)$ και ε_L $(= F_L L/Y)$ και συνεπώς, βάσει της 42, και το μέγεθος των εισοδηματικών μεριδίων α_{Π} και α_W. Έχοντας εντοπίσει αυτή την ιδιότυπη και χαρακτηριστικά νεοκλασική **υπαγωγή** της θεωρίας της διανομής στην θεωρία της παραγωγής – μια υπαγωγή που εκφράζεται από την ταύτιση των εισοδηματικών μεριδίων α_{Π} και α_W με τις ελαστικότη-

[30] Θα πρέπει να σημειωθεί ότι η έκφραση pY στην 41 αναφέρεται στην αξία του συνολικού **καθαρού** προϊόντος, πράγμα που σημαίνει ότι έχει ήδη αφαιρεθεί η αξία της **φθοράς** που υφίσταται το απόθεμα κεφαλαίου K κατά την διάρκεια της παραγωγής. Για τον λόγο αυτό, στην τιμή εκμίσθωσης $\bar{r}$ θα περιλαμβάνεται και ένα ορισμένο χρηματικό ποσό που θα αποτελεί την αποζημίωση ανά μονάδα εκμισθούμενου κεφαλαίου που εισπράττουν τα νοικοκυριά από τις επιχειρήσεις προκειμένου να **αντικαταστήσουν** (ή να **αποσβέσουν**) την φθορά που υφίσταται το απόθεμα κεφαλαίου K κατά την διάρκεια της παραγωγικής του χρήσης. Είναι χαρακτηριστικό γνώρισμα της νεοκλασικής θεωρίας, ότι δεν προβλέπει και την καταβολή μιας αντίστοιχης αποζημίωσης για την «φθορά» (φυσική και ψυχική κούραση, απώλεια αυτοτέλειας, «αποξένωση» κλπ.) που υφίσταται το εργατικό δυναμικό κατά την διάρκεια της παραγωγικής του χρήσης.

τες της παραγωγής ε_K και ε_L – επανερχόμαστε τώρα στην σχέση 40, χωρίς να ξεχνάμε βέβαια ότι η σχέση αυτή ισχύει μόνον εάν υποτεθεί ότι η συνάρτηση παραγωγής $Y = F(K, L)$ είναι γραμμικά ομογενής (ρ=1). Επειδή όμως η υπόθεση αυτή συνεπάγεται, όπως δείξαμε προηγουμένως, τον μηδενισμό των επιχειρηματικών κερδών ($\overline{\Pi}_\varepsilon = 0$), είναι προφανές ότι το συνολικό εισόδημα pY δεν μπορεί παρά να διανέμεται εξ ολοκλήρου στα νοικοκυριά με την μορφή κερδών (προσόδων) και μισθών. Τούτο βέβαια σημαίνει ότι στην περίπτωση σταθερών αποδόσεων κλίμακας (ρ=1) το άθροισμα των εισοδηματικών μεριδίων α_Π και α_W θα πρέπει αναγκαστικά να ισούται με την μονάδα

$$\alpha_\Pi + \alpha_W = 1 \tag{43}$$

πράγμα που μπορεί κανείς να το επιβεβαιώσει και αναλυτικά, διαιρώντας τις δύο πλευρές της 40 με pY και εισάγωντας στην έκφραση που θα προκύψει την αρχή της οριακής παραγωγικότητας, η οποία υπολογίζει το μέγεθος των εισοδηματικών μεριδίων βάσει των σχέσεων $\alpha_\Pi = pF_K K/pY$ και $\alpha_W = pF_L L/pY$. Το γεγονός όμως, ότι τα εισοδηματικά μερίδια α_Π και α_W είναι ταυτόσημα με τις ελαστικότητες ε_K και ε_L, σημαίνει ότι η ισχύς της διανεμητικής σχέσης 43 προϋποθέτει πως η συνάρτηση παραγωγής $Y = F(K, L)$ θα πρέπει να είναι τέτοιας μορφής ώστε, όποιος και αν είναι ο συνδυασμός με τον οποίο χρησιμοποιούνται στην παραγωγή οι συντελεστές K και L, το άθροισμα των ελαστικοτήτων ε_K και ε_L θα πρέπει να ισούται πάντοτε με την μονάδα:

$$\varepsilon_K + \varepsilon_L = 1. \tag{44}$$

Για να διαπιστώσουμε το τι ακριβώς συνεπάγεται για την μορφή της συνάρτησης $Y = F(K, L)$ η συνθήκη 44 θα πρέπει να ανατρέξουμε στην βασική ιδιότητα των ομογενών συναρτήσεων που εκφράζεται από το θεώρημα Euler. Διαιρώντας και τα δύο σκέλη της 34 με Y και λαμβάνοντας υπόψη τους ορισμούς $\varepsilon_K = F_K K/Y$ και $\varepsilon_L = F_L L/Y$ καταλήγουμε στο ακόλουθο γενικό συμπέρασμα. Στην περίπτωση που υποτεθεί πως η συνάρτηση $Y = F(K, L)$ είναι διπλά παραγωγίσιμη, κυρτή και ομογενής με βαθμό ομογένειας ρ, τότε το άθροισμα των μερικών ελαστικοτήτων ε_K και ε_L θα ισούται με τον βαθμό ομογένειας ρ:

$$\varepsilon_K + \varepsilon_L = \rho. \tag{45}$$

Η σχέση αυτή μας επιτρέπει να επιβεβαιώσουμε, με διαφορετικό τρόπο, την βασική πρόταση που θεμελιώσαμε προηγουμένως, σύμφωνα με την οποία ο μηδενισμός των επιχειρηματικών κερδών που είναι απαραίτητος για την μετατροπή της αρχής της οριακής παραγωγικότητας σε θεωρία της διανομής (βλ. σχέση 40) προϋποθέτει ότι η συνάρτηση παραγωγής $Y = F(K, L)$ είναι γραμμικά ομογενής (ή, σε όρους του διαγράμματος 15, ότι $\max \overline{\Pi}_\varepsilon = 0$, μόνον εάν για την ομογενή συνάρτηση $Y = F(K, L)$ ισχύει πως ρ=1). Τώρα βλέπουμε και πάλι ότι μόνον υπό τον όρο πως ρ=1 είναι δυνατό να ταυτισθεί η σχέση 45 με την σχέση 44, και μέσω αυτής, και με την σχέση 43. Πρόκειται για μια ταύτιση που είναι προφανώς αναγκαία, αν είναι να ισχυρισθεί κανείς ότι η σχέση 43 είναι σε θέση να ερμηνεύσει, βάσει της αρχής της οριακής παραγωγικότητας, το πώς ακριβώς το συνολικό εισόδημα pY διανέμεται εξ ολοκλήρου στους ιδιοκτήτες των εκμισθούμενων συντελεστών παραγωγής K και L, χωρίς να αφήνονται περιθώρια για την εμφάνιση ενός υπολοίπου, το οποίο θα παρέμενε στην ιδιοκτησία των επιχειρήσεων με την μορφή επιχειρηματικών κερδών.

Η σχέση 45 μας επιτρέπει όμως να προχωρήσουμε ένα βήμα πάρα πέρα και να διαπιστώσουμε το τι θα συνέβαινε στο κύκλωμα των χρηματικών ροών του σχήματος 15, εάν υποθέταμε ότι το κύκλωμα των πραγματικών ροών λειτουργεί βάσει μιας συνάρτησης παραγωγής $Y = F(K, L)$, της οποίας ο βαθμός ομογένειας ρ είναι μεγαλύτερος ή μικρότερος της μονάδας (αύξουσες ή φθίνουσες αποδόσεις κλίμακας). Είναι προφανές ότι τούτη την φορά δεν μπορούμε πια να χρησιμοποιήσουμε την σχέση 40, μιας και η σχέση αυτή έχει προκύψει από την σχέση 39 για την ειδική περίπτωση όπου ρ=1. Τώρα είμαστε αναγκασμένοι να ξεκινήσουμε και πάλι από την σχέση 39, υποθέτωντας ότι αυτή ισχύει για οποιανδήποτε τιμή του ρ, συμπεριλαμβανομένης και της τιμής ρ=1:

$$\overline{\Pi}_\varepsilon = pY - \left(pF_K K + pF_L L\right). \tag{39}$$

Εάν διαιρέσουμε και τις δύο πλευρές της 39 με pY θα έχουμε για το μερίδιο των επιχειρηματικών κερδών στο συνολικό εισόδημα την έκφραση

$$\frac{\overline{\Pi}_\varepsilon}{pY} = 1 - \left(\frac{F_K K}{Y} + \frac{F_L L}{Y}\right),$$

η οποία μπορεί να αναδιατυπωθεί, με την βοήθεια των ορισμών 26 και της σχέσης 45, ως εξής:

$$\overline{\Pi}_\varepsilon = (1-\rho)pY. \tag{46}$$

Από την έκφραση αυτή συμπεραίνουμε αμέσως ότι τα επιχειρηματικά κέρδη $\overline{\Pi}_\varepsilon$ θα είναι θετικά, αρνητικά ή μηδενικά, ανάλογα με το εάν η συνάρτηση παραγωγής $Y = F(K, L)$ χαρακτηρίζεται από φθίνουσες (ρ<1), αύξουσες (ρ>1) ή σταθερές (ρ=1) αποδόσεις κλίμακας. Στον βαθμό που δεν αποκλείουμε εκ των προτέρων την εμφάνιση θετικών (ή αρνητικών) επιχειρηματικών κερδών, γίνεται προφανές από την 39 ότι το χρηματικό ποσό pY που εισπράττουν οι επιχειρήσεις από την πώληση του συνολικού προϊόντος Y θα υπερκαλύπτει (ή δεν θα καλύπτει) το συνολικό κόστος παραγωγής του Y, δηλαδή το συνολικό χρηματικό ποσό που απαιτείται για την εκμίσθωση των συντελεστών παραγωγής K και L και το οποίο ισούται με το άθροισμα του συνόλου των προσόδων (κερδών) $\overline{\Pi}(= pF_K K)$ και του συνόλου των μισθών $\overline{W}(= pF_L L)$. Στην πρώτη περίπτωση θα είχαμε $\overline{\Pi}_\varepsilon = pY - (\overline{\Pi} + \overline{W}) > 0$, ενώ στην δεύτερη $\overline{\Pi}_\varepsilon = pY - (\overline{\Pi} + \overline{W}) < 0$. Δεν χρειάζεται και πολλή σκέψη για να διαπιστώσει κανείς ότι και οι δύο αυτές περιπτώσεις είναι ασυμβίβαστες με την λογική, βάσει της οποίας έχει κατασκευασθεί η νεοκλασική εκδοχή του οικονομικού κυκλώματος (βλ. σχήμα 15).

Ας εξετάσουμε για παράδειγμα την περίπτωση εμφάνισης θετικών επιχειρηματικών κερδών (την περίπτωση αρνητικών επιχειρηματικών κερδών αφήνουμε να την εξετάσει από μόνος του ο αναγνώστης). Αυτό που θα πρέπει από την αρχή να τονισθεί είναι ότι η κυκλική κίνηση της ιδιοκτησίας, έτσι όπως αυτή απεικονίζεται στο σχήμα 15, αρχίζει να χάνει την εσωτερική της συνοχή, την στιγμή που επιτρέψει κανείς να εμφανισθούν στον πόλο «επιχειρήσεις» ιδιοκτησιακά στοιχεία, τα οποία δεν μεταβιβάζονται, μέσω των αγορών, στον πόλο «νοικοκυριά» αλλά παραμένουν, μετά το τέλος των ανταλλαγών, στην ιδιοκτησία των επιχειρήσεων (υπενθυμίζουμε ότι, στο σχήμα 15, οι επιχειρήσεις αποτελούν μεν αυτοτελείς μορφές ιδιοκτησίας, αλλά η ιδιοκτησία τους έχει μόνον προσωρινό και όχι πάγιο χαρακτήρα). Εάν παρουσιασθεί μια θετική διαφορά ανάμεσα στα έσοδα των επιχειρήσεων από την πώληση του Y και στο συνολικό κόστος παραγωγής του Y, τότε οι επιχειρήσεις εμφανίζονται ξαφνικά ως ιδιοκτήτες ενός πράγματος (και συγκεκριμένα ενός ποσού χρημάτων $\overline{\Pi}_{\varepsilon}$), το οποίο **δεν το κατείχαν** αρχικά και του οποίου την **προέλευση** αδυνατούμε να εντοπίσουμε στο πλαίσιο του οικονομικού κυκλώματος. Και τούτο, διότι η νεοκλασική λογική μας λέγει ότι το μόνο πράγμα που βρίσκεται αρχικά στην ιδιοκτησία των επιχειρήσεων είναι η γνώση της διαθέσιμης τεχνολογίας $Y = F(K, L)$ και ότι, στο τέλος κάθε περιόδου, οι επιχειρήσεις πωλούν στα νοικοκυριά το σύνολο της τρέχουσας παραγωγής τους, επιστρέφοντας ταυτόχρονα στα νοικοκυριά και όλα τα ιδιοκτησιακά στοιχεία που είχαν αρχικά εκμισθώσει. Παράλληλα με το μυστήριο που καλύπτει την προέλευση ενός **«υπερκέρδους»** στα χέρια των επιχειρήσεων, δηλαδή ενός κέρδους $\overline{\Pi}_{\varepsilon}$ πέραν των **«κανονικών»** κερδών $\overline{\Pi}$ που διοχετεύονται στα νοικοκυριά, η ίδια η εμφάνιση ενός τέτοιου «υπερκέρδους» αρχίζει να δημιουργεί εσωτερικές ρωγμές και αντιφάσεις στην αντίληψη περί ιδιοκτησίας, στην οποία έχει στηριχθεί η ερμηνευτική λογική του οικονομικού κυκλώματος, ανατρέποντας έτσι και την ίδια την κατασκευαστική του αρχή. Η δυνατότητα να εμφανισθούν οι επιχειρήσεις, στο τέλος μιας περιόδου, ως ιδιοκτήτες μιας ορισμένης ποσότητας χρημάτων $\overline{\Pi}_{\varepsilon}$ σημαίνει ότι αυτές δεν είναι πλέον αναγκασμένες να **εκμισθώσουν** από τα νοικοκυριά όλα τα κεφαλαιουχικά αγαθά που θα χρειασθούν για την παραγωγή της επόμενης περιόδου. Τώρα οι επιχειρήσεις θα παρουσιασθούν οι ίδιες στις αγορές τελικών προϊόντων και με το χρηματικό ποσό $\overline{\Pi}_{\varepsilon}$ θα **αγοράσουν** από άλλες επιχειρήσεις ένα τμήμα της τρέχουσας παραγωγής Y, το οποίο, όντας πλέον δική τους ιδιοκτησία, θα χρησιμοποιηθεί στην παραγωγή των επόμενων περιόδων, υποκαθιστώντας έτσι μέσα παραγωγής που ανήκουν στα νοικοκυριά με μέσα παραγωγής που αποτελούν ιδιοκτησία των επιχειρήσεων. Η υποκατάσταση αυτή ενέχει μάλιστα και μια εσωτερική δυναμική που συνεπάγεται και την συνέχισή της. Η εμφάνιση επιχειρηματικών κερδών, η οποία οδήγησε, αρχικά, σε μια πρώτη υποκατάσταση ιδιοκτησιακών στοιχείων που ανήκουν στα νοικοκυριά από στοιχεία που ανήκουν στην επιχειρήσεις θα εκφρασθεί, στην επόμενη περίοδο, ως μείωση του κόστους παραγωγής, αφού θα έχει μειωθεί το χρηματικό ποσό που διατίθεται για την εκμίσθωση μέσων παραγωγής από τα νοικοκυριά. Τούτο σημαίνει όμως ότι στην επόμενη περίοδο θα παρουσιασθεί μια **ενδογενής** πλέον πίεση για μία περαιτέρω αύξηση των επιχειρηματικών κερδών, με αποτέλεσμα να συνεχισθεί η διαδικασία υποκατάστασης και να αυξηθεί έτσι το τμήμα εκείνο του συνολικού προϊόντος Y, το οποίο δεν θα γίνεται ιδιοκτησία των ατόμων-ιδιοκτητών, στο πάνω μέρος του σχήματος 15, αλλά θα συσσωρεύεται στην ιδιοκτησία των επιχειρήσεων, στο κάτω μέρος του σχήματος 15 (πράγμα, βέβαια, που δεν προβλέπεται από την λογική που διέπει την κατασκευή του σχήματος 15). Η δυνατότητα των επιχειρήσεων να **αυτοχρηματοδοτούν** ένα τουλάχιστον τμήμα της δικής τους συσσώρευσης κεφαλαίου καθώς και η παγίωση άμεσων **σχέσεων αγοραπωλησίας μεταξύ των επιχειρήσεων**, χωρίς την μεσολάβηση των νοικοκυριών, συνεπάγονται μια ριζική **ανακατασκευή** του σχήματος 15, αφού επιβάλλουν μια ριζική αναδιάταξη της κατανομής των ιδιοκτησιακών στοιχείων μεταξύ επιχειρήσεων και νοικοκυριών καθώς και μια ριζική αναδιάρθρωση τόσο του κυκλώματος των πραγματικών όσο και του κυκλώματος των χρηματικών ροών. Η δυνατότητα ύπαρξης επιχειρηματικών κερδών $\overline{\Pi}_{\varepsilon}$, η αυτοτρεφόμενη διεύρυνσή τους καθώς και η ανεξαρτητοποίησή τους από την εκμισθωτική έννοια του «κανονικού» κέρδους Π μεταμορφώνουν ουσιαστικά το αρχικό ιδιοκτησιακό καθεστώς του πόλου «επιχειρήσεις», μετατρέποντάς τον από μια προσωρινή σε μια **πάγια** και **αυτοτελή** μορφή ιδιοκτησίας, η οποία συνυπάρχει με την εξατομικευμένη μορφή ιδιοκτησίας των νοικοκυριών[31]. Το γεγονός της αλληλοεξαρτούμενης αναπαραγωγής των δύο αυτών διαφορετικών μορφών ατομικής ιδιοκτησίας δεν σημαίνει βέβαια ότι υπάρχουν λόγοι που εγγυώνται, εκ προοιμίου, ότι η διαχρονική συνύπαρξή τους θα είναι οπωσδήποτε **αρμονική** και ότι δεν θα εμφανισθούν **αντινομίες** και **αντιθέσεις** ανάμεσα στην αυτοτέλεια της ιδιοκτησίας των επιχειρήσεων (μεγιστοποίηση των επιχειρηματικών κερδών) και στην αυτοτέλεια της ιδιοκτησίας των νοικοκυριών (μεγιστοποίηση της ατομικής τους ωφέλειας).

Για να αποκλεισθεί η δυνατότητα εμφάνισης τέτοιου είδους αντιθέσεων και αντινομιών και για να διατηρηθεί ανέπαφη η εικόνα του οικονομικού κυκλώματος στο σχήμα 15, είναι προφανές ότι θα πρέπει κατά κάποιο τρόπο να ακυρωθεί η δυνατότητα ύπαρξης επιχειρηματικών κερδών (θετικών ή και αρνητικών). Όπως φαίνεται τώρα, εκ των υστέρων, αυτήν ακριβώς την σκοπιμότητα εξυπηρετεί η εισαγωγή της παραδοχής περί σταθερών αποδόσεων κλίμακας και περί τέλειου ανταγωνισμού, μιας παραδοχής που εγγυάται, εκ των προτέρων, ότι η μεγιστοποίηση των επιχειρηματικών κερδών οδηγεί τελικά στην αυτοακύρωσή της, δηλαδή στον μηδενισμό των επιχειρηματικών κερδών ($\overline{\Pi}_{\varepsilon} = 0$). Έτσι όμως η ιδιοκτησία των επιχειρήσεων χάνει πια και την ίδια την αυτοτέλειά της. Εάν αντικαταστίσουμε, στο κάτω μέρος του σχήματος 15, τον συμβο-

---

[31] Η ανακατασκευή του οικονομικού κυκλώματος προς αυτήν την κατεύθυνση αποτελεί χαρακτηριστικό γνώρισμα της μαρξιστικής, και σε μεγάλο βαθμό, και της κεϋνσιανής θεωρίας. Την ανακατασκευή αυτή θα την παρουσιάσουμε σε άλλο σημείωμά μας, ξεκινώντας από την έννοια της καπιταλιστικής επιχείρησης καθώς και από τα κυκλώματα των διαφόρων μορφών κεφαλαίου που καταγράφονται στα λογιστικά της βιβλία.

λισμό $\overline{\Pi}_\varepsilon \to \max$ με τον συμβολισμό $\max \overline{\Pi}_\varepsilon = 0$, τότε οι επιχειρήσεις δεν αποτελούν πια αυτοτελείς και πάγιες μορφές ατομικής ιδιοκτησίας αλλά μόνον προσωρινές που δικαιολογούν, τελικά, το σκοπό ύπαρξής τους επειδή απλώς λειτουργούν «ανιδιοτελώς» ($\overline{\Pi}_\varepsilon = 0$) ως χώροι τεχνικού μετασχηματισμού αγαθών ορισμένης μορφής (συντελεστές παραγωγής) σε αγαθά διαφορετικής μορφής (τελικά προϊόντα). Για τον λόγο αυτό το συνολικό εισόδημα της κοινωνίας (pY) δεν μπορεί να είναι τίποτε άλλο παρά το σύνολο των χρηματικών ανταλλαγμάτων $\overline{\Pi}$ και $\overline{W}$ που αποκομίζουν από τις επιχειρήσεις όλοι εκείνοι οι ιδιοκτήτες (νοικοκυριά) που επιλέγουν να εκχωρήσουν σε αυτές, για ένα ορισμένο χρονικό διάστημα, το δικαίωμα χρήσης πάνω σε ένα κομμάτι της ζωής τους καθώς και σε άλλα αντικείμενα πλούτου που τους ανήκουν. Τα στοιχεία αυτά (εργασία L και φυσικό κεφάλαιο K) οι επιχειρήσεις τα χρησιμοποιούν «ανιδιοτελώς» ($\overline{\Pi}_\varepsilon = 0$) προκειμένου να τα μετασχηματίσουν, μέσω μιας ελεύθερα διαθέσιμης τεχνολογίας $Y = F(K, L)$, σε τελικά προϊόντα (Y), τα οποία τα πωλούν στην αγορά, μεταβιβάζοντας έτσι το δικαίωμα κυριότητας πάνω σε αυτά στους μόνους ιδιοκτήτες που υπάρχουν στην κοινωνία και που είναι τα νοικοκυριά.

Αφού όμως τα νοικοκυριά είναι τα μόνα υποκείμενα της κοινωνίας που ιδιοποιούνται με την μορφή μισθών $\overline{W}$ και κερδών (προσόδων) $\overline{\Pi}$ το συνολικό εισόδημα pY (= $\overline{Y}$')

$$\overline{Y} = pY = \overline{\Pi} + \overline{W},$$

το οποίο ισούται εξ ορισμού με την αξία του συνολικού προϊόντος Y και αφού το συνολικό προϊόν Y αγοράζεται εξ ολοκλήρου από τα νοικοκυριά, πράγμα που διασφαλίζεται από τον «νόμο του Say», ο οποίος προβλέπει, όπως είπαμε προηγουμένως (βλ. 36), την ισότητα μεταξύ της συνολικής ζήτησης $\overline{D}$ (σε χρηματικούς όρους) και της αξίας της συνολικής προσφοράς $\overline{Y}$ (=pY)

$$\overline{Y} = pY = \overline{D}$$

είναι σαφές ότι η **χρήση** του **συνολικού εισοδήματος** $\overline{Y} = pY = \overline{\Pi} + \overline{W}$ από την πλευρά των νοικοκυριών θα είναι αυτή που θα καθορίσει την **κατανομή** του **συνολικού προϊόντος** Y, δηλαδή τον βαθμό στον οποίο αυτό θα εμφανισθεί με την μορφή καταναλωτικών αγαθών C ή με την μορφή επενδυτικών αγαθών I (νέων μέσων παραγωγής): $Y = C + I$. Το πώς ακριβώς τα νοικοκυριά χρησιμοποιούν το συνολικό εισόδημά τους $\overline{Y} = pY$ εξαρτάται, αποκλειστικά και μόνον (σύμφωνα πάντοτε με την νεοκλασική λογική), από τις υποκειμενικές τους προτιμήσεις. Κάποια νοικοκυριά θα προτιμήσουν να καταναλώσουν ένα μόνο τμήμα $\overline{C}$ (=pC) του τρέχοντος εισοδήματός τους $\overline{Y}$ και θα μετατρέψουν το υπόλοιπο σε αποταμιεύσεις $\overline{S}$, καταθέτοντάς το εντόκως, μέσω της αγοράς εκμίσθωσης χρηματικού κεφαλαίου, σε κάποια επιχείρηση του χρηματοπιστωτικού τομέα (βλ. σχήμα 15):

$$\overline{Y} = pY = pC + \overline{S}.$$

Και το κάνουν αυτό επειδή υπολογίζουν ότι θα έχουν στο μέλλον αυξημένα εισοδήματα από τόκους, διασφαλίζοντας έτσι εγκαίρως την δυνατότητα αγοράς περισσότερων αγαθών σε μελλοντικές περιόδους (στο σχήμα 15, το χρηματικό επιτόκιο συμβολίζεται με i_m). Θα υπάρξουν όμως και νοικοκυριά που θα προτιμήσουν να αγοράσουν όχι μόνο καταναλωτικά αλλά και επενδυτικά αγαθά, προκειμένου να τα προσθέσουν στα αποθέματα που ήδη κατέχουν ώστε να είναι μελλοντικά σε θέση να εκμισθώσουν στις επιχειρήσεις περισσότερες ποσότητες φυσικού κεφαλαίου. Τούτο θα τους επιτρέψει να έχουν στο μέλλον αυξημένα εισοδήματα από κέρδη (προσόδους), διασφαλίζοντας κατ' αυτόν τον τρόπο (δηλαδή με επενδύσεις και όχι με αποταμιεύσεις, όπως συνέβη με τα άλλα νοικοκυριά) την δυνατότητα να αγοράζουν στο μέλλον περισσότερα αγαθά ή και να δουλεύουν λιγότερο ή να μην δουλεύουν καθόλου. Εάν τα νοικοκυριά, στο σύνολό τους, επιλέγουν να αποταμιεύσουν από το συνολικό εισόδημά τους $\overline{Y}$ ένα ορισμένο ποσό $\overline{S}$ και να χρησιμοποιήσουν το υπόλοιπο ποσό $\overline{Y}-\overline{S}$ για την αγορά μιας ορισμένης ποσότητας C καταναλωτικών αγαθών, συνολικής αξίας pC ($=\overline{Y}-\overline{S}$), τότε η ζήτησή τους για την αγορά της ποσότητας επενδυτικών αγαθών I, συνολικής αξίας pI, θα πρέπει αναγκαστικά να χρηματοδοτηθεί μέσω της άντλησης από τον χρηματοπιστωτικό τομέα ενός ισόποσου δανείου $\overline{\Delta}$

$$\overline{\Delta}=pI\,,$$

όπου για την συνολική ζήτηση $\overline{D}$, σε χρηματικούς όρους, θα ισχύει προφανώς ότι

$$\overline{D}=pC+pI\,.$$

Στο σημείο αυτό τίθεται ένα ερώτημα που είναι καίριας σημασίας για την εξισορρόπιση όλων των ροών, των χρηματικών και των πραγματικών, του οικονομικού κυκλώματος στο σχήμα 15: ποια θα είναι η σχέση που θα διαμορφωθεί τελικά ανάμεσα στην τρέχουσα προσφορά δανειακών κεφαλαίων που ισούται με τις αποταμιεύσεις $\overline{S}$ και στην τρέχουσα ζήτηση δανειακών κεφαλαίων $\overline{\Delta}$ που ισούται με την αξία της ζήτησης για την αγορά των επενδυτικών αγαθών I;

Παρακολουθώντας τώρα το κύκλωμα των χρηματικών ροών στο σχήμα 15, ας δούμε την απάντηση που δίνει η νεοκλασική θεωρία στο ερώτημα για την σχέση μεταξύ προσφοράς και ζήτησης δανειακού κεφαλαίου, μια σχέσης η οποία, όπως δείξαμε προηγουμένως, δεν αποτελεί τίποτε άλλο παρά μια αναδιατυπωμένη μορφή της σχέσης μεταξύ αποταμιεύσεων $\overline{S}$ και επενδύσεων $\overline{I}$, όπου $\overline{I}$ η χρηματική αξία της ζήτησης για επενδυτικά αγαθά I ($\overline{I}=pI$). Για να αποφευχθούν τυχόν παρεξηγήσεις που προέρχονται από παραστάσεις που έχουμε για τον κόσμο στον οποίο πράγματι ζούμε, επαναλαμβάνουμε για μια ακόμα φορά ότι η νεοκλασική θεωρία αναφέρεται σε έναν κόσμο όπου οι **επενδύσεις** και οι **αποταμιεύσεις** καθορίζονται από **αποφάσεις** που παίρνονται μόνον από τα **νοικοκυριά**. Στις αποφάσεις αυτές οι επιχειρήσεις δεν παίζουν κανέναν ρόλο, αφού ούτε δικά τους εισοδήματα έχουν ($\overline{\Pi}_\varepsilon=0$) ούτε δική τους ιδιοκτησία σε μέσα παραγωγής την οποία, αν την είχαν, θα μπορούσαν να την αυξήσουν, αγοράζοντας επενδυτικά αγαθά. Όπως φαίνεται και στο σχήμα 15, οι επιχειρήσεις εκμισθώνουν προσωρινά την χρήση των συντελεστών παραγωγής K και L, πωλούν το συνολικό προϊόν Y, αλλά δεν αγοράζουν τίποτε. Όλοι οι συντελεστές παραγωγής ανήκουν στα νοικοκυριά και αυτά είναι τα μόνα υποκείμενα που ιδιοποιούνται τόσο το συνολικό εισόδημα που προκύπτει από την παραγωγή και την πώληση του συνολικού προϊόντος Y όσο και το ίδιο το συνολικό προϊόν Y. Συνεπώς, τα νοικοκυριά είναι τα μόνα υποκείμενα που αποφασίζουν τόσο για το πώς θα διαχωρισθεί το συνολικό εισόδημα σε δαπάνες για την αγορά καταναλωτικών αγαθών και σε αποταμιεύσεις όσο και για το πώς θα κατανεμηθεί το συνολικό προϊόν Y σε προϊόντα καταναλωτικής και σε προϊόντα επενδυτικής υφής.

Στον βαθμό που υποτεθεί ότι η αγορά εκμίσθωσης χρηματικού κεφαλαίου είναι τελείως ανταγωνιστική, θα μπορούσε κανείς να χρησιμοποιήσει το γενικό εξηγηματικό σχήμα της νεοκλασικής θεωρίας (εξισορρόπηση προσφοράς και ζήτησης) και να ισχυρισθεί ότι η ελεύθερη κίνηση του επιτοκίου i_m θα τείνει να μειώσει σταδιακά την οποιαδήποτε πλεονάζουσα προσφορά δανειακών κεφαλαίων ($\overline{S} > \overline{I}$) ή την οποιαδήποτε πλεονάζουσα ζήτηση ($\overline{S} < \overline{I}$). Αποτέλεσμα της διαδικασίας αυτής θα είναι η διαμόρφωση ενός επιτοκίου ισορροπίας, όπου η συνολική προσφορά δανειακών κεφαλαίων $\overline{S}$ θα εξισωθεί τελικά με την συνολική ζήτηση $\overline{I}$ ($\overline{S} = \overline{I}$). Όμως, επειδή στο σχήμα 15 η οικονομία εκλαμβάνεται ως ένα σύστημα τεσσάρων αγορών που βρίσκονται σε κατάσταση ταυτόχρονης ισορροπίας (**γενική ισορροπία**), δεν είναι απαραίτητα αναγκαίο να επικαλεσθεί κανείς το εξηγηματικό σχήμα της προσφοράς και της ζήτησης προκειμένου να δείξει ότι η ζήτηση επενδυτικών αγαθών $\overline{I}$ (=pI) προσαρμόζεται αυτόματα στο επίπεδο των αποταμιεύσεων $\overline{S}$. Το συμπέρασμα αυτό προκύπτει ως λογικό επακόλουθο της υπόθεσης ότι επικρατεί ισορροπία στις τρεις άλλες αγορές, δηλαδή στην αγορά προϊόντων, στην αγορά εκμίσθωσης φυσικού κεφαλαίου και στην αγορά εκμίσθωσης εργατικού δυναμικού[32]. Η εξισορρόπηση της πρώτης αγοράς σημαίνει πως στην αγορά αυτή διαμορφώνεται μια τιμή p, στην οποία η αξία της συνολικής προσφοράς $\overline{Y}$ εξισώνεται με την συνολική ζήτηση $\overline{D}$ σε χρηματικούς όρους ($\overline{Y} = \overline{D}$, όπου $\overline{Y} = pY$). Επειδή όμως για την συνολική ζήτηση $\overline{D}$ ισχύει ότι $\overline{D} = pC + pI$, η συνθήκη ισορροπίας στην αγορά προϊόντων θα πρέπει να συνεπάγεται

$$pY = pC + pI \; (\overline{Y} = \overline{D}, \overline{Y} = pY). \tag{47}$$

Από την άλλη πλευρά, η εξισορρόπηση των αγορών εκμίσθωσης φυσικού κεφαλαίου και εργατικού δυναμικού ($K^s = K^d = K$, $L^s = L^d = L$), μαζί με την παραδοχή περί σταθερών αποδόσεων κλίμακας, μέσω της οποίας μηδενίζονται τα επιχειρηματικά κέρδη ($\overline{\Pi}_\varepsilon = 0$), διασφαλίζουν ότι στις τιμές ισορροπίας $\overline{r}$ και $\overline{w}$ η αξία του συνολικού προϊ-

[32] Για όσους έχουν μηυθεί στα απόκρυφα της θεωρίας της γενικής ισορροπίας, σημειώνουμε πως το συμπέρασμα αυτό συνδέεται με ένα γενικότερης εμβέλειας θεώρημα που είναι γνωστό με το όνομα **«νόμος του Walras»**.

όντος pY θα ισούται με το συνολικό εισόδημα που αποκτούν τα νοικοκυριά από τις επιχειρήσεις με την μορφή κερδών $\bar{\Pi}$ $(=\bar{r}K)$ και με την μορφή μισθών $\bar{W}$ $(=\bar{w}L)$:

$$pY=\bar{r}K+\bar{w}L=\bar{\Pi}+\bar{W}. \tag{48}$$

Τελικά, εάν τα νοικοκυριά αποφασίσουν να καταναλώσουν από το τρέχον εισόδημά τους pY ένα ποσό pC και να αποταμιεύσουν το υπόλοιπο ποσό $\bar{S}$, θα ισχύει εξ ορισμού η σχέση

$$pY=pC+\bar{S}. \tag{49}$$

Συγκρίνοντας τώρα την σχέση αυτή με την συνθήκη ισορροπίας στην αγορά προϊόντων $\bar{Y}=\bar{D}$ (βλ. 47) προκύπτει το συμπέρασμα ότι και η τέταρτη αγορά (δηλαδή η αγορά εκμίσθωσης χρηματικού κεφαλαίου) θα πρέπει και αυτή να βρίσκεται σε ισορροπία, αφού το σύνολο των αποταμιεύσεων $\bar{S}$ (προσφορά χρηματικού κεφαλαίου) ισούται με το ποσό χρημάτων που απαιτείται (ζήτηση χρηματικού κεφαλαίου) για να χρηματοδοτηθεί η συνολική επενδυτική δαπάνη pI:

$$\bar{S}=pI. \tag{50}$$

Η αντιστοιχία μεταξύ των συνθηκών ισορροπίας $\bar{Y}=\bar{D}$ και $\bar{S}=pI$ μπορεί να γενικευθεί ώστε να καλύψει και καταστάσεις ανισορροπίας. Εάν π.χ. $\bar{Y}\gtrless\bar{D}$, τότε η 47 συνεπάγεται πως $pY\gtrless\bar{D}=pC+pI$ ή, διαφορετικά, πως $pY-pC\gtrless pI$. Το γεγονός όμως ότι το πρώτο σκέλος της τελευταίας ανισότητας ισούται εξ ορισμού με $\bar{S}$ (βλ. 49) σημαίνει ότι, εάν $\bar{Y}\gtrless\bar{D}$ τότε $\bar{S}\gtrless pI$ ή, γενικότερα, ότι:

$$\bar{Y}\begin{Bmatrix}>\\=\\<\end{Bmatrix}\bar{D}\Leftrightarrow\bar{S}\begin{Bmatrix}>\\=\\<\end{Bmatrix}pI. \tag{51}$$

Σύμφωνα λοιπόν με την 51, η εμφάνιση μιας υπερβάλλουσας προσφοράς (ζήτησης) στην αγορά προϊόντων θα έχει ως συνέπεια την εμφάνιση μιας υπερβάλλουσας προσφοράς (ζήτησης) στην αγορά χρηματικού κεφαλαίου ή, με άλλα λόγια, την εμφάνιση μιας κατάστασης στην οποία οι συνολικές αποταμιεύσεις θα είναι μεγαλύτερες (μικρότερες) της συνολικής επενδυτικής δαπάνης.

Τις τρεις **συνθήκες μακροοικονομικής ισορροπίας** 47, 48 και 49 θα μπορούσε κανείς να τις θεωρήσει ότι αποτελούν μια συμπυκνωμένη καταγραφή του συστήματος των εθνικολογιστικών κατηγοριών μιας κλειστής οικονομίας χωρίς δημόσιο τομέα. Όμως, επειδή μια οικονομία δεν βρίσκεται ποτέ σε κατάσταση ισορροπίας, η μετατροπή αυτών των τριών συνθηκών ισορροπίας σε **εθνικολογιστικές ταυτότητες** προϋποθέτει ότι οι εκάστοτε διαφορές μεταξύ συνολικής προσφοράς και συνολικής ζήτησης στην αγορά προϊόντων (βλ. 51) θα πρέπει να μετονομασθούν σε «ακούσιες» ή «αθέλητες» επενδύσεις (ακούσιες αυξομειώσεις αποθεμάτων) και να συμπεριληφθούν στον υπολογισμό των συνολικών επενδυτικών δαπανών pI. Κατ' αυτόν τον τρόπο επικαλύπτεται η εμφάνιση ανισοτήτων στην συνθήκη 51 και αυτή εμφανίζεται τώρα ως ταυτότητα (ταυτολογία), όπου το συνολικό προϊόν έχει τεθεί, εξ ορισμού, ίσο με την συνολική δαπάνη και οι συνολικές αποταμιεύσεις ίσες με τις συνολικές επενδύσεις. Υπό την προϋπόθεση αυτή μπορούμε να θεωρήσουμε ότι στις εκφράσεις 47, 48 και 49, οι οποίες δεν είναι πια συνθήκες ισορροπίας αλλά ταυτολογικοί ορισμοί, αποτυπώνονται οι τρεις διαφορετικές όψεις της εθνικολογιστικής έννοιας του συνολικού (καθαρού) προϊόντος καθώς και του αντικατοπτρισμού του που είναι η εθνικολογιστική έννοια του συνολικού (καθαρού) εισοδήματος. Ο ορισμός 47 αναφέρεται στην έννοια του συνολικού προϊόντος και μας δείχνει τον τρόπο με τον οποίο αυτό απορροφάται πλήρως, μέσω της αγοράς, από την συνολική δαπάνη, η οποία κατανέμεται σε δαπάνες για την αγορά καταναλωτικών αγαθών και σε επενδυτικές δαπάνες. Ο ορισμός 48 αναφέρεται στον αντικατοπτρισμό της έννοιας του συνολικού προϊόντος, δηλαδή στην έννοια του συνολικού εισοδήματος, και μας δείχνει την διανομή του τελευταίου σε εισοδήματα από εξαρτημένη εργασία (μισθοί) και σε εισοδήματα από εκμετάλλευση περιουσιακών στιοχείων (κέρδη). Τελικά, στον ορισμό 49 καταγράφεται η χρήση του συνολικού εισοδήματος, δηλαδή ο διαχωρισμός του σε δαπάνες για την αγορά καταναλωτικών αγαθών και σε αποταμιεύσεις.

Για λόγους που μας είναι, λίγο ή πολύ, γνωστοί και οι οποίοι διευκρινίζονται στα πρώτα κεφάλαια κάθε εγχειριδίου εισαγωγής στην Μακροοικονομική, είναι πολλές φορές προτιμότερο να εκφράζουμε τα διάφορα μακροοικονομικά μεγέθη σε **πραγματικούς** και όχι σε **ονομαστικούς** («χρηματικούς») όρους, όπως συμβαίνει στην περίπτωση των ορισμών 47, 48 και 49. Εάν χρησιμοποιήσουμε ως «αποπληθωριστή» την «μέση» τιμή p, στην οποία συντελείται, στην τρέχουσα περίοδο, η αγοραπωλησία του συνολικού προϊόντος Y, τότε μπορούμε να υπολογίσουμε την πραγματική αξία κάθε μακροοικονομικής μεταβλητής που μας δίνεται σε ονομαστικούς όρους (να υπολογίσουμε δηλαδή το μέγεθός της σε «σταθερές τιμές»), διαιρώντας το ονομαστικό μέγεθός της με την τιμή p. Συνεπώς, για να διατυπώσουμε τους ορισμούς 47, 48 και 49 σε πραγματικούς όρους, αρκεί να διαιρέσουμε και τις δύο πλευρές τους με p, πράγμα που μας οδηγεί στις εκφράσεις

$$Y = C + I \ \ (Y = D) \tag{47΄}$$

$$Y = rK + wL = \Pi + W \tag{48΄}$$

$$Y = C + S \tag{49΄}$$

όπου w $(=\overline{w}/p)$ και r $(=\overline{r}/p)$ η πραγματική τιμή του μισθού και του ποσοστού κέρδους, W (=wL) και Π (=rK) η πραγματική αξία του συνόλου των μισθών και του συνόλου των κερδών και S $(=\overline{S}/p)$ η πραγματική αξία των χρηματικών αποταμιεύσεων $\overline{S}$.

Όμως, εάν οι εκφράσεις 47΄, 48΄ και 49΄ δεν ερμηνευθούν ως εθνικολογιστικές ταυτότητες αλλά ως συνθήκες μακροοικονομικής ισορροπίας, τότε αυτές μας επαναφέρουν στο νεοκλασικό κύκλωμα των χρηματικών ροών στο σχήμα 15, καλώντας μας να μετατρέψουμε (να μεταφράσουμε) τα μεγέθη των επιμέρους χρηματικών ροών σε όρους (δηλαδή σε μονάδες) του συνολικού προϊόντος Y. Έτσι η έκφραση 47΄ μας δείχνει ότι, στην περίπτωση ισορροπίας στην αγορά προϊόντων, η αξία της συνολικής ζήτησης $\overline{D}$ (σε χρηματικούς όρους) θα πρέπει να ισούται, σε πραγματικούς όρους $(\overline{D}/p = D)$, με το μέγεθος της προσφερόμενης ποσότητας προϊόντος Y (Y=D). Από την άλλη μεριά, η έκφραση 48΄ μας σηματοδοτεί ότι, στην περίπτωση σταθερών αποδόσεων κλίμακας και εξισορρόπησης των αγορών εκμίσθωσης των συντελεστών παραγωγής, το άθροισμα της αγοραστικής αξίας Π (σε μονάδες του προϊόντος Υ) του συνόλου των χρηματικών κερδών $\overline{\Pi}$ ($\Pi = \overline{\Pi}/p$) και της αγοραστικής αξίας W του συνόλου των χρηματικών μισθών $\overline{W}$ ($W = \overline{W}/p$) θα πρέπει να ισούται με την αγοραστική αξία του συνολικού εισοδήματος pY η οποία δεν είναι τίποτε άλλο παρά το ίδιο το συνολικό προϊόν Y ($pY/p = Y$). Τελικά η έκφραση 49΄ μας δείχνει ότι το συνολικό εισόδημα σε πραγματικούς όρους (Y) θα ισούται, εξ ορισμού, με το άθροισμα της ποσότητας των καταναλωτικών αγαθών C που αγοράζουν τα νοικοκυριά και της πραγματικής αξίας S των χρηματικών αποταμιεύσεων $\overline{S}$ ($S = \overline{S}/p$), οι οποίες χρησιμοποιούνται εξ ολοκλήρου για να χρηματοδοτήσουν την αγορά μιας ποσότητας επενδυτικών αγαθών ίσης με I (S=I).

Εάν το καλοσκεφτεί κανείς, αυτή η μετάφραση όλων των χρηματικών μεγεθών σε όρους του συνολικού προϊόντος Y μας μεταφέρει, στο σχήμα 15, από το κύκλωμα των χρηματικών στο κύκλωμα των πραγματικών ροών. Τα όσα έχουν να μας πουν οι συνθήκες 47΄, 48΄ και 49΄ αναφέρονται, αποκλειστικά και μόνο, σε μεγέθη του κυκλώματος των πραγματικών ροών, γεγονός που σημαίνει ότι έτσι παύει να είναι αναγκαία και η χάραξη του κυκλώματος των χρηματικών ροών στο σχήμα 15. Τώρα αποδεικνύεται ότι το κύκλωμα αυτό δεν είναι τίποτε άλλο παρά ένας **πέπλος** που καλύπτει τις πραγματικές ανταλλακτικές σχέσεις (αντιπραγματισμός), συσκοτίζοντας έτσι τα όσα πράγματι συμβαίνουν στην οικονομία. Και αυτά που πράγματι συμβαίνουν στην οικονομία μπορούμε, σύμφωνα με την νεοκλασική θεωρία, να τα ανακαλύψουμε παρακολουθώντας απλώς την κίνηση του κυκλώματος των πραγματικών ροών, χωρίς να χρειάζεται η οποιαδήποτε αναφορά στο μυστηριώδες εκείνο εμπόρευμα που το αποκαλέσαμε **χρήμα** και του οποίου η **προέλευση** παρέμεινε, έτσι ή αλλιώς, ένα **ανεξήγητο** φαινόμενο στο πλαίσιο του κυκλώματος των χρηματικών ροών. Κοιτάζοντας, λοιπόν, μέσα από το πρίσμα των εκφράσεων 47΄, 48΄ και 49΄, μόνο το κύκλωμα των πραγματικών ροών, βλέπουμε πως ο μόνος ενεργός πόλος της οικονομίας είναι ο πόλος στον οποίο εδρεύουν τα διάφορα άτομα-ιδιοκτήτες που τα ονομάσαμε και νοικοκυριά. Αυτά είναι τελικά και τα μόνα αυτοτελή υποκείμενα της κοινωνίας, τα οποία, όντας γνώστες της διαθέσιμης τεχνολογίας $Y = F(K, L)$ και ακολουθώντας τις ατομικές τους προτιμήσεις ($U(E, G) \rightarrow \max$), αποφασίζουν να χρησιμοποιήσουν ορισμένες ποσότητες L και K από τα ιδιοκτησιακά τους στοιχεία Ω και V και να παράξουν τα ίδια, φορώντας τον διπλό μανδύα του εργαζόμενου και του επιχειρηματία, τις διάφορες ποσότητες προϊόντων που περιλαμβάνονται στο συνολικό προϊόν Y. Και αφού τα νοικοκυριά είναι ταυτόχρονα και οι ιδιοκτήτες όλων αυτών των επιθυμητών προϊόντων (Y=D), τα νοικοκυριά θα είναι τελικά και αυτά που θα αποφασίσουν ποιο τμήμα του συνολικού προϊόντος Y θα το χρησιμοποιήσουν με την μορφή καταναλωτικών αγαθών C και ποιο τμήμα του θα το βάλουν κατά μέρος (αποταμιεύσεις σε πραγματικούς όρους S, όπου $Y = C + S$) για να το χρησιμοποιήσουν με την μορφή νέων μέσων παραγωγής (επενδυτικά αγαθά I), προκειμένου να αυξήσουν την ατομική ευχαρίστησή τους στο μέλλον ($Y = C + I$). Στο πλαίσιο του κυκλώματος των πραγματικών ροών η έκφραση 48΄, η οποία αναφέρεται στην πραγματική αξία του συνόλου των κερδών Π (=rK) και του συνόλου των μισθών W (=wL) εκπληροί για τα νοικοκυριά μια **εσωτερική** και καθαρά **λογιστική** λειτουργία. Τους δίνει την δυνατότητα να **υπολογίσουν**, βάσει της αρχής της οριακής παραγωγικότητας ($r = \overline{r}/p = pF_K/p = F_K$ και $w = \overline{w}/p = pF_L/p = F_L$), ποιο τμήμα της νέας τους ιδιοκτησίας Y οφείλεται στην επενέργεια του περιουσιακού τους στοιχείου «εργασία» ($W = wL = F_L L$) και ποιο στην επενέργεια του περιουσιακού τους στοιχείου «φυσικό κεφάλαιο» ($\Pi = rK = F_K K$)[33]. Για να **παρακαμφθεί** μάλιστα το **πρόβλημα της άθροισης** των διαφορετικών **ατομικών προτιμήσεων** των διαφόρων νοικοκυριών καθώς και το πρόβλημα της άθροισης των διαφορετικών **συναρτήσεων παραγωγής** των μονάδων στις οποίες παράγονται τα διάφορα προϊόντα που περιλαμβάνονται στο συνολικό προϊόν Y (και για να συγκροτηθεί, έτσι, η **μακροοικονομική** εκδοχή του οικονομικού κυκλώματος που παρουσιάζεται στο σχήμα 15)[34], η νεοκλασική θεωρία υιοθετεί την παραδοχή ότι στην κοινωνία υπάρχει **ένα** και μόνο **υποκείμενο** (ο **Ροβινσώνας Κρούσος**) καθώς και την παραδοχή ότι το συνολικό προϊόν Y αποτελείται από **ένα ομογενές** αγαθό. Το ομογενές αυτό αγαθό (σιτάρι) το παράγει ο ίδιος ο Ροβινσώνας Κρούσος (βάσει της γνωστής του τεχνολογίας $Y = F(K, L)$) και το χρησιμοποιεί ανάλογα με τις προτιμήσεις του $U = U(E, G)$ είτε ως καταναλωτικό αγαθό C (τροφή) είτε ως επενδυτικό αγαθό I (σπόρος)[35].

(γ) Η γραμμική ομογένεια της $Y = F(K, L)$ και η αναδιατύπωση της νεοκλασικής θεωρίας της παραγωγής και της διανομής σε εντατικούς όρους

Ας εξετάσουμε τώρα την δεύτερη ιδιότητα των ομογενών συναρτήσεων (βλ. 35), η οποία, αν και δεν είναι και τόσο σημαντική από άποψη οικονομικού περιεχομένου όσο η πρώτη (βλ. 34), μας προσφέρει την δυνατότητα να απλουστεύσουμε κατά πολύ

---

[33] Το αποτέλεσμα αυτού του υπολογισμού θα είναι σωστό, μόνον εάν η διαθέσιμη τεχνολογία $Y = F(K.L)$ είναι σταθερών αποδόσεων κλίμακας, αφού μόνο στην περίπτωση αυτή θα ισχύει ότι το άθροισμα $\Pi + W$ ($= rK + wL = F_K K + F_L$) θα ισούται με Y (βλ. θεώρημα Euler).

[34] Βλ. τις παρατηρήσεις που έγιναν προηγουμένως σε ό,τι αφορά το θέμα της ετερογένειας του συνολικού προϊόντος (§4.2.) καθώς και σε ό,τι αφορά την παραδοχή περί ευπλασίας του κεφαλαίου (§4.3.δ). Βλ. επίσης και **H.G. Jones**, Εισαγωγή στις σύγχρονες θεωρίες της οικονομικής μεγέθυνσης, Αθήνα 1993, σελ. 35-36 και σελ. 157-171.

[35] Για την «Οικονομία του Ροβινσώνα Κρούσου» βλ. **H.R. Varian**, Μικροοικονομική – Μια σύγχρονη προσέγγιση. Αθήνα 1992, Κεφ. 28, καθώς επίσης και **M. Chacholiades**, Μικροοικονομική, Αθήνα 1986, Κεφ. 14. Ας σημειωθεί επίσης ότι στα νεοκλασικά υποδείγματα της «άριστης» ή «βέλτιστης» μεγέθυνσης ο Ροβινσώνας Κρούσος μετονομάζεται σε «Αρχιπρογραμματιστή» ή σε «Καλοπροαίρετο Δικτάτορα», αφήνοντας έτσι να εννοηθεί, ότι οι προτιμήσεις του παντοδύναμου αυτού προσώπου αντανακλούν πιστά τις ατομικές προτιμήσεις των διαφόρων νοικοκυριών (ή των υπηκόων). Τούτο έχει βέβαια αμφιλεγόμενες συνέπειες. εάν σκεφθεί κανείς ότι εδώ πρόκειται για την «άριστη» μεγέθυνση μιας καπιταλιστικής οικονομίας. η οποία υποτίθεται πως συγκροτείται βάσει της αρχής της ατομικής ελευθερίας και η οποία λειτουργεί χωρίς κεντρικό σχεδιασμό (βλ. **H.G. Jones**, ό.π., σελ. 257-258).

την μαθηματική διατύπωση και την γραφική παρουσίαση των βασικών νεοκλασικών επιχειρημάτων που αφορούν όχι μόνον την θεωρία της παραγωγής και της διανομής αλλά και την θεωρία της συσσώρευσης κεφαλαίου και της οικονομικής μεγέθυνσης. Στον βαθμό που σκεφτόμαστε πως η συνάρτηση $Y = F(K, L)$ παριστάνει μια συνάρτηση παραγωγής, οι εναλλακτικές διατυπώσεις της $Y = F(K, L)$ που μας προσφέρει η 35 δεν φαίνεται να έχουν και πολύ νόημα. Όμως, οι διατυπώσεις αυτές αποκτούν ιδιαίτερη σημασία από άποψη οικονομικής ερμηνείας στην περίπτωση που υποτεθεί πως η συνάρτηση $Y = F(K, L)$ χαρακτηρίζεται από **σταθερές αποδόσεις κλίμακας**. Εάν υιοθετήσουμε την παραδοχή ότι η διπλά παραγωγίσιμη και κυρτή συνάρτηση $Y = F(K, L)$ είναι ταυτόχρονα και γραμμικά ομογενής (ρ=1), τότε η 35 απλουστεύεται αισθητά, παίρνοντας την ακόλουθη μορφή:

$$\begin{aligned} &(\alpha) \quad \frac{Y}{L} = f\left(\frac{K}{L}\right) \\ &(\beta) \quad \frac{Y}{K} = \varphi\left(\frac{L}{K}\right) \\ &(\gamma) \quad F\left(\frac{K}{Y}, \frac{L}{Y}\right) = 1 \end{aligned} \qquad (52)$$

Το βασικό πλεονέκτημα και των τριών αυτών εναλλακτικών τρόπων γραφής της συνάρτησης παραγωγής σε σύγκριση με την αρχική της μορφή $Y = F(K, L)$ είναι προφανές. Ενώ στην τελευταία ο αριθμός των μεταβλητών είναι τρεις (Y, K και L) και ο συσχετισμός τους εκφράζεται σε **απόλυτους όρους**, και στις τρεις εναλλακτικές εκδοχές της $Y = F(K, L)$ που μας δίνονται από την 52 ο συσχετισμός μεταξύ των μεταβλητών Y, K και L εκφράζεται σε **σχετικούς όρους** (δηλαδή με την μορφή αναλογιών ή λόγων), πράγμα που έχει ως αποτέλεσμα την **μείωση** του αριθμού των μεταβλητών από τρεις σε δύο. Όταν λοιπόν υποθέτει κανείς ότι η συνάρτηση παραγωγής $Y = F(K, L)$ είναι ομογενής πρώτου βαθμού, είναι το ίδιο πράγμα σαν να υποθέτει – ανάλογα με ποιαν από τις τρεις μεταβλητές (την L, την K ή την Y) επιλέγει ως μεταβλητή αναφοράς – μία από τις ακόλουθες τρεις διαφορετικές αλλά μεταξύ τους ισοδύναμες υποθέσεις: είτε ότι ο λόγος Y/L εξαρτάται μόνον από τον λόγο K/L, είτε ότι ο λόγος Y/K εξαρτάται μόνον από τον λόγο L/K, είτε τελικά ότι ο λόγος L/Y εξαρτάται μόνον από τον λόγο K/Y ή και αντίστροφα.

Επειδή και τα τρία ζεύγη αναλογιών (Y/L, K/L), (Y/K, L/K) και (K/Y, L/Y) βάσει των οποίων διατυπώνονται οι τρεις εναλλακτικές μορφές της $Y = F(K, L)$ παίζουν κεντρικό ρόλο στην θεωρητική και εμπειρική ανάλυση της οικονομικής μεγέθυνσης, έχει επικρατήσει να συμβολίζουμε κάθε αναλογία με ένα ειδικό γράμμα και να τους δίνουμε και μία ιδιαίτερη ονομασία. Σε ό,τι αφορά το πρώτο ζεύγος, είδαμε προηγουμένως ότι ο λόγος Y/L – τον οποίο συμβολίσαμε με $y\ (= Y/L)$ – είναι το μέσο προϊόν ή η μέση **παραγωγικότητα της εργασίας** και ότι ο λόγος K/L, που τον συμβολίσαμε με k $(=K/L)$, εκφράζει τον βαθμό εκμηχάνισης της παραγωγής ή, αλλιώς, την **ένταση κεφαλαίου**. Μολονότι στο δεύτερο ζεύγος αναλογιών δεν έχουν δοθεί ιδιαίτερες ονομασίες, χρησιμοποιείται μερικές φορές για τον λόγο προϊόντος-κεφαλαίου το γράμμα σ $(=Y/K)$ και για τον λόγο εργασίας-κεφαλαίου το γράμμα ℓ $(=L/K)$ [36]. Κατ' αναλογία με τις ονομασίες του πρώτου ζεύγους αναλογιών y και k, θα μπορούσαμε να πούμε ότι ο λόγος σ εκφράζει την μέση **αποδοτικότητα ή παραγωγικότητα του κεφαλαίου** και ότι ο λόγος ℓ εκφράζει την **ένταση εργασίας**. Τελικά, οι αναλογίες του τρίτου ζεύγους είναι οι γνωστοί μας **συντελεστές εισροών-εκροών** ν και u (βλ. 29), όπου ν $(=K/Y)$ ο συντελεστής εισροών κεφαλαίου και u $(=L/Y)$ ο συντελεστής εισροών εργασίας. Εισάγοντας λοιπόν τους παραπάνω συμβολισμούς στην 52 καταλήγουμε στους ακόλουθους τρεις εναλλακτικούς τρόπους **εντατικής γραφής** της συνάρτησης παραγωγής $Y=F(K,L)$, βέβαια υπό την προϋόθεση ότι η συνάρτηση αυτή είναι γραμμικά ομογενής (σταθερές αποδόσεις κλίμακας):

$$\begin{aligned}
&(\alpha) \quad y=f(k),\; y=Y/L \;\text{ και }\; k=K/L \\
&(\beta) \quad \sigma=\varphi(\ell),\; \sigma=Y/K \;\text{ και }\; \ell=L/K \\
&(\gamma) \quad F(\nu,u)=1,\; \nu=K/Y \;\text{ και }\; u=L/Y
\end{aligned} \qquad (52')$$

Αν και εκ πρώτης όψεως φαίνεται να εμφανίζονται στις τρεις αυτές εκφράσεις έξι διαφορετικές μεαβλητές (y, k, σ, ℓ, ν και u), στην πραγματικότητα πρόκειται μόνον για δύο. Εάν επιλέξουμε π.χ. να χρησιμοποιήσουμε τον πρώτο τρόπο εντατικής γραφής και εάν μας δίνεται ένας οποισδήποτε συνδυασμός των δύο μεταβλητών y και k, τότε μπορούμε να εκφράσουμε τις υπόλοιπες τέσσερις μεταβλητές σ, ℓ, ν και u σε όρους των k και y: $\sigma=y/k$, $\ell=1/k$, $\nu=k/y$ και $u=1/y$.

Το γεγονός ότι οι τρεις αυτοί εναλλακτικοί τρόποι γραφής της $Y=F(K,L)$ είναι συναρτήσεις που έχουν μόνον μία ανεξάρτητη μεταβλητή (μονομεταβλητές συναρτήσεις) αποτελεί και τον βασικό λόγο για τον οποίο χρησιμοποιούνται τόσο συχνά στην θεωρητική και εμπειρική βιβλιογραφία. Επειδή η μαθηματική διατύπωση θεωρητικών επιχειρημάτων γίνεται πιο εύκολη όσο μικρότερος είναι ο αριθμός των εμπλεκομένων στα επιχειρήματα μεταβλητών, είναι σαφές ότι θα είναι πάντοτε προτιμότερο να χρησιμοποιεί κανείς μία από τις μονομεταβλητές συναρτήσεις της 52΄, αντί της διμεταβλητής συνάρτησης $Y=F(K,L)$. Στην περίπτωση αυτή απλουστεύεται όχι μόνον η μαθηματική διατύπωση των επιχειρημάτων αλλά και η γραφική παρουσίασή τους. Η αντικατάσταση της $Y=F(K,L)$ από μία μονομεταβλητή συνάρτηση μας επιτρέπει να αποφύγουμε την περίπλοκη απεικόνιση της τρισδιάστατης επιφάνειας $Y=F(K,L)$ μέσω των τριών δισδιάστατων διαγραμμάτων του σχήματος 8 και να μεταφέρουμε όλες τις πληροφορίες που εμπεριέχονται και στα τρία αυτά διαγράμματα σε ένα και μόνο δισδιά-

[36] Υπενθυμίζουμε ότι στην βιβλιογραφία το γράμμα σ χρησιμοποιείται επίσης και για τον συμβολισμό της ελαστικότητας υποκατάστασης (βλ. 28). Για τον λόγο αυτό θα πρέπει κανείς να προσέχει, εάν από τα συμφραζόμενα προκύπτει ότι το σύμβολο σ αναφέρεται στον λόγο προϊόντος-κεφαλαίου ή στην ελαστικότητα υποκατάστασης.

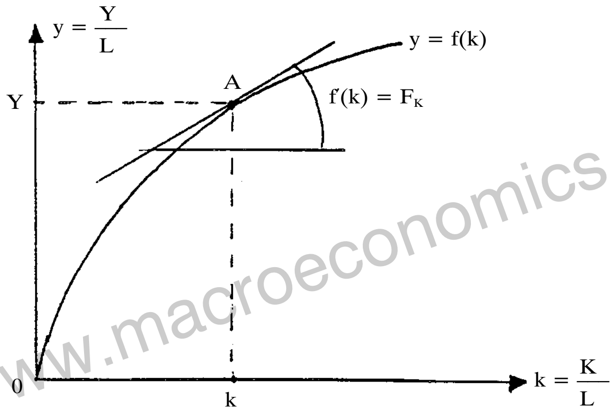
στατο διάγραμμα. Στο διάγραμμα αυτό θα απεικονίζεται η καμπύλη της συνάρτησης εκείνης που θα έχουμε επιλέξει από τον κατάλογο 52΄ προκειμένου να την χρησιμοποιήσουμε στην θέση της $Y = F(K, L)$. Για να εξακριβώσουμε το πώς ακριβώς γίνεται η μεταφορά αυτή, θα πρέπει βέβαια να προσδιορίσουμε προηγουμένως την μορφή που έχει η καμπύλη κάθε μιάς των τριών συναρτήσεων $y = f(k)$, $\sigma = \varphi(\ell)$ και $F(v, u) = 1$. Στις επόμενες σελίδες θα εξετάσουμε μόνον την καμπύλη της συνάρτησης $y = f(k)$, μιας και αυτή είναι που χρησιμοποιείται πιο συχνά στην βιβλιογραφία. Όμως η μέθοδος που θα ακολουθήσουμε για την διερεύνηση των ιδιοτήτων της συνάρτησης $y = f(k)$, την οποία την ονομάζουμε πολλές φορές και **συνάρτηση παραγωγικότητας**, μπορεί πολύ εύκολα να εφαρμοσθεί και για την διερεύνηση των ιδιοτήτων της συνάρτησης $\sigma = \varphi(\ell)$ και της συνάρτησης $F(v, u) = 1$.

Για τους ευνόητους λόγους που αναφέρθηκαν στην αρχή της §4.3.α. είναι προφανές ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $y = f(k)$ θα περιορίζεται σε μη-αρνητικές τιμές της k και ό,τι το ίδιο θα ισχύει και για το πεδίο τιμών της y ($y = Y/L \geq 0$, $k = K/L \geq 0$). Είναι επίσης σχεδόν αυτονόητο ότι η κλίση της καμπύλης $y = f(k)$ – δηλαδή η πρώτη παράγωγος της y ως προς k που την συμβολίζουμε με $dy/dk = f'(k)$ – θα πρέπει να είναι πάντοτε ένας θετικός αριθμός. Η παραδοχή πως το οριακό προϊόν του κεφαλαίου είναι πάντοτε θετικό ($F_K > 0$) συνεπάγεται ότι, καθώς θα αυξάνεται οριακά ο κεφαλαιουχικός εξοπλισμός ανά εργαζόμενο (k), θα αυξάνεται και το μέσο προϊόν ανά εργαζόμενο (y). Όμως, επειδή υποθέτουμε επίσης ότι το οριακό προϊόν του κεφαλαίου αυξάνεται με φθίνοντα ρυθμό ($F_{KK} < 0$), κάθε πρόσθετη αύξηση του κεφαλαιουχικού εξοπλισμού ανά εργαζόμενο (k) θα πρέπει να οδηγεί σε μια όλο και πιο μικρή αύξηση του προϊόντος ανά εργαζόμενο (y), δηλαδή σε μια όλο και πιο μικρή αύξηση της παραγωγικότητας της εργασίας. Άρα, η καμπύλη της συνάρτησης $y = f(k)$ θα έχει μεν θετική κλίση ($f'(k) > 0$), αλλά η κλίση της θα φθίνει, καθώς θα αυξάνεται το μέγεθος της k. Τούτο βέβαια σημαίνει ότι η δεύτερη παράγωγος της $y = f(k)$ θα πρέπει να είναι αρνητική. Το γεγονός ότι για την συνάρτηση $y = f(k)$ ισχύει πως $f'(k) > 0$ και $f''(k) < 0$ συνεπάγεται ότι η καμπύλη της $y = f(k)$ θα πρέπει να έχει θετική κλίση και να είναι κυρτή ως προς τον οριζόντιο άξονα. Να έχει δηλαδή την μορφή που έχει σχεδιαστεί στο σχήμα 16. Το συμπέρασμα αυτό μπορεί να θεμελιωθεί και με αναλυτικό τρόπο. Επειδή $y = Y/L$, αναδιατυπώνουμε την $y = f(k)$ ως εξής: $Y = Lf(k)$. Εάν παραγωγίσουμε την έκφραση αυτή ως προς k, λαμβάνοντας βέβαια υπόψη ότι $k = K/L$, έχουμε βάσει του αλυσωτού κανόνα,

$$\frac{\partial Y}{\partial K} = Lf'(k)\frac{\partial k}{\partial K} = f'(k),$$

αφού $\partial k/\partial L = 1/L$. Άρα, η κλίση της καμπύλης $y = f(k)$ στο σχήμα 16 θα πρέπει να είναι πάντοτε θετική για όλες τις τιμές του k, αφού αυτή ισούται με το πάντοτε θετικό οριακό προϊόν του κεφαλαίου $\partial Y/\partial K \equiv F_K > 0$:

$$F_K = f'(k). \tag{53}$$



Σχήμα 16.

Τελικά, για να δείξουμε ότι $f''(k) < 0$ παραγωγίζουμε την 53 ως προς K και αποκτάμε, πάλι μέσω του αλυσωτού κανόνα, την έκφραση

$$f''(k)\frac{\partial k}{\partial K} = F_{KK},$$

από την οποία συμπεραίνουμε ότι $f''(k) = LF_{KK} < 0$, αφού $\partial k/\partial L = 1/L > 0$ και $F_{KK} < 0$.

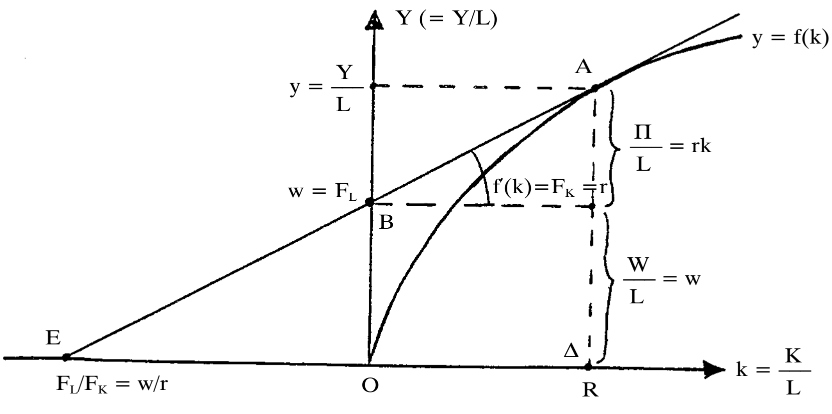
Παρενθετικά σημειώνουμε επίσης ότι με την ίδια μέθοδο, με την οποία μελετήσαμε προηγουμένως την καμπύλη της συνάρτησης $y = f(k)$, μπορούμε να μελετήσουμε και τις καμπύλες των συναρτήσεων $\sigma = \varphi(\ell)$ και $F(v,u) = 1$. Εάν αναδιατυπώσουμε την συνάρτηση $\sigma = \varphi(\ell)$, δίνοντάς της την μορφή $Y = K\varphi(\ell)$, και εάν κάνουμε τον κόπο να παραγωγίσουμε την έκφραση αυτή δύο φορές ως προς L θα διαπιστώσουμε ότι $\varphi'(\ell) = F_L > 0$ και ότι $\varphi''(\ell) < 0$. Τούτο σημαίνει πως η καμπύλη της $\sigma = \varphi(\ell)$ είναι κυρτή ως προς τον οριζόντιο άξονα ℓ και ότι η κλίση της ισούται με το οριακό προϊόν της εργασίας F_L. Σε ό,τι αφορά την συνάρτηση $F(v,u) = 1$ τα πράγματα είναι ακόμα πιο απλά, αφού η καμπύλη της δεν είναι τίποτε άλλο παρά η καμπύλη ίσου προϊόντος για Y=1. Έχοντας ήδη εντοπίσει τις ιδιότητες της καμπύλης ίσου προϊόντος για οποιαδήποτε τιμή της Y (βλ. σχήμα 8.γ.) μπορούμε, ακόμα και εάν δεν κάνουμε τις απαραίτητες παραγωγίσεις, να καταλήξουμε στο συμπέρασμα ότι: $dv/du = -F_L/F_K < 0$ και $d^2v/du^2 > 0$.

Έχοντας δείξει ότι η κλίση της καμπύλης παραγωγικότητας $y = f(k)$ στο σχήμα 16 ισούται με το οριακό προϊόν του κεφαλαίου F_K *είναι πολύ εύκολο να δείξουμε ότι* σε αυτό το απλό σχήμα είναι δυνατό να εντοπισθούν και όλες οι άλλες διαστάσεις της νεοκλασικής **θεωρίας της παραγωγής**, τις οποίες, για να τις παρουσιάσουμε γεωμετρικά, χρειάστηκε προηγουμένως να χρησιμοποιήσουμε και τρία διαγράμματα του αρκετά περίπλοκου σχήματος 8. Τώρα όλα γίνονται πολύ πιο απλά. Για οποιονδήποτε συνδυασμό των συντελεστών παραγωγής K και L μπορούμε να εντοπίσουμε αμέσως με την βοήθεια της καμπύλης $y = f(k)$ τρία βασικά πράγματα (βλ. σημείο A στο σχήμα 17): το αντίστοιχο μέγεθος της έντασης κεφαλαίου k $(= K/L)$ που μας δίνεται από την - απόσταση ΟΔ, το προϊόν ανά εργαζόμενο y $(= Y/L)$ που ισούται με $y = f(k)$ και μας δίνεται από την απόσταση ΔΑ και, τελικά, το οριακό προϊόν του κεφαλαίου $F_K = f'(k)$, του οποίου το μέγεθος εκφράζεται από την κλίση της εφαπτομένης ευθείας στο σημείο Α. Το ερώτημα που τίθεται τώρα είναι, εάν μπορούμε να εντοπίσουμε στο σχήμα 17 και το οριακό προϊόν της εργασίας F_L. Στο σημείο αυτό θα πρέπει να θυμηθούμε πως η εντατική γραφή της συνάρτησης παραγωγής $Y = F(K, L)$ στηρίζεται στην παραδοχή περί σταθερών αποδόσεων κλίμακας, η οποία εκφράζεται από την ειδική μορφή του θεωρήματος Euler $Y = F_K K + F_L L$. Εάν διαιρέσουμε και τις δύο πλευρές της έκφρασης αυτής με L και εάν επιλύσουμε το αποτέλεσμα ως προς F_L έχουμε την έκφραση

$$F_L = \frac{Y}{L} - \frac{K}{L} F_K,$$

την οποία μπορούμε να την αναδιατυπώσουμε σε όρους της εντατικής γραφής $y = f(k)$ θέτοντας $Y/L = f(k)$, $K/L = k$ και $F_K = f'(k)$:

$$F_L = f(k) - kf'(k). \tag{54}$$



Σχήμα 17.

Η σημασία της 54 έγκειται στο γεγονός ότι μας επιτρέπει να υπολογίσουμε για κάθε δοσμένο συνδυασμό των συντελεστών παραγωγής K και L – δηλαδή για κάθε δοσμένη τιμή της έντασης κεφαλαίου k $(= K/L)$ – το αντίστοιχο μέγεθος του οριακού προϊόντος της εργασίας F_L. Το ζήτημα είναι, εάν μπορούμε να δώσουμε, στο πλαίσιο του σχήματος 17, και μια γεωμετρική ερμηνεία στην έκφραση 54. Κατ' αρχάς, προεκτείνουμε την εφαπτομένη ευθεία στο σημείο Α προς τα αριστερά, έως ότου αυτή συναντήσει τον κάθετο άξονα στο σημείο Β και τον οριζόντιο άξονα στο σημείο Ε. Ο πρώτος όρος $f(k)$ στην δεξιά πλευρά της 54 είναι προφανώς η απόσταση ΔΑ $(= Y/L)$. Όμως, ο δεύτερος όρος $kf'(k)$ δεν είναι τίποτε άλλο παρά η απόσταση ΓΑ και αυτό για τον εξής απλούστατο λόγο. Αφού η κλίση της γωνίας ΑΒΓ ισούται με $f'(k)$, θα ισχύει, σε σχέση με το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, ότι $f'(k) = ΓΑ/ΒΓ$. Επειδή όμως $ΒΓ = k$, προκύπτει από την έκφραση αυτή ότι $ΓΑ = kf'(k)$. Από το γεγονός ότι $ΔΑ = f(k)$ και $ΓΑ = kf'(k)$ συμπεραίνουμε πως η απόσταση $ΔΓ = ΔΑ - ΓΑ$ στο σχήμα 17 θα πρέπει να ισούται με την διαφορά $f(k) - kf'(k)$. Τούτο βέβαια σημαίνει, σε σχέση με την 54, ότι η απόσταση ΟΒ (=ΔΓ) στο σχήμα 17 θα ισούται με F_L. Έτσι καταλήγουμε στο σημαντικό, από άποψη γεωμετρικής ερμηνείας, συμπέρασμα ότι η απόσταση ΟΒ που οροθετείται από την τομή της εφαπτομένης ευθείας με τον κάθετο άξονα μας δείχνει το μέγεθος του οριακού προϊόντος της εργασίας F_L. Όμως, η οικονομική ερμηνεία των γεωμετρικών ιδιοτήτων της καμπύλης $y = f(k)$ δεν τελειώνει εδώ. Η τομή της εφαπτομένης ευθείας με τον οριζόντιο άξονα οριοθετεί ένα σημείο Ε, του οποίου η απόσταση από το σημείο Ο θα πρέπει να ισούται με τον λόγο των οριακών προϊόντων F_L/F_K, δηλαδή με τον οριακό λόγο τεχνικής υποκατάστασης $-dK/dL$ (ή με την αντίστροφο του οριακού λόγου τεχνικής υποκατάστασης $-dL/dK$ που τον συμβολίσαμε προηγουμένως με R). Επειδή η κλίση της γωνίας ΒΕΟ στο σχήμα 17 είναι ίση με $f'(k) = F_K$, θα πρέπει να ισχύει, βάσει του ορθογωνίου τριγώνου ΒΕΟ, ότι $F_K = OB/OE$. Γνωρίζοντας όμως τώρα ότι η απόσταση ΟΒ ισούται με F_L, προκύπτει αμέσως από την τελευταία έκφραση ότι $OE = F_L/F_K$ [37]. Τελικά, θα θέλαμε να δείξουμε ότι οι ιδιότητες της καμπύλης $y = f(k)$ μας επιτρέπουν να εντοπίσουμε στο σχήμα 17 και δύο άλλες βασικές έννοιες της νεοκλασικής θεωρίας της παραγωγής, που είναι οι μερικές ελαστικότητες της παραγωγής $ε_K$ και $ε_L$ (βλ. 26). Για την ελαστικότητα της συνάρτησης $y = f(k)$, που θα την συμβολίσουμε με $ε_k$, ισχύει εξ ορισμού η σχέση

---

[37] Επισημαίνουμε ότι η προέκταση, στο σχήμα 17, του οριζόντιου άξονα προς τα αριστερά του σημείου Ο δεν θα πρέπει να θεωρηθεί ότι αποτελεί τον άξονα των αρνητικών τιμών της μεταβλητής k. Πρόκειται απλώς για μια βοηθητική γεωμετρική κατασκευή που την χρησιμοποιούμε για να εκτιμήσουμε το μέγεθος του λόγου F_L/F_K.

$$\varepsilon_k = \frac{k}{y}\frac{dy}{dk} = \frac{kf'(k)}{f(k)},$$

η οποία, επειδή $k = K/L$, $f'(k) = F_K$ και $f(k) = Y/L$, μπορεί να αναδιατυπωθεί και ως εξής:

$$\varepsilon_k = \frac{(K/L)F_K}{Y/L} = \frac{KF_K}{Y}.$$

Λαμβάνοντας υπόψη τους ορισμούς 26 συμπεραίνουμε πως η ελαστικότητα της συνάρτησης $y = f(k)$ ισούται με την μερική ελαστικότητα της $Y = F(K, L)$ ως προς K: $\varepsilon_k = \varepsilon_K$. Επειδή όμως ο ορισμός της $y = f(k)$ προϋποθέτει την γραμμική ομογένεια της $Y = F(K, L)$ είναι σαφές πως το άθροισμα των μερικών ελαστικοτήτων της παραγωγής ε_K και ε_L θα ισούται με την μονάδα (βλ. 44). Άρα, μεταξύ της ελαστικότητας ε_k και των μερικών ελαστικοτήτων ε_K και ε_L θα πρέπει να ισχύει

$$\varepsilon_k = \varepsilon_K = 1 - \varepsilon_L. \qquad (55)$$

Έτσι συμπεραίνουμε ότι, όταν υπολογίζουμε το μέγεθος της ελαστικότητας της καμπύλης $y = f(k)$ για οποιανδήποτε τιμή του k, υπολογίζουμε ταυτόχρονα και το μέγεθος της μερικής ελαστικότητας ε_K $(= \varepsilon_k)$ και, έμμεσα, και το μέγεθος της μερικής ελαστικότητας ε_L $(= 1 - \varepsilon_k)$.

Έχοντας παρουσιάσει στο σχήμα 17 την νεοκλασική θεωρία της παραγωγής μας είναι τώρα πολύ εύκολο να παρουσιάσουμε στο ίδιο σχήμα και την νεοκλασική **θεωρία της διανομής**, αφού τις κεντρικές έννοιες που συνδέουν τις δύο αυτές πλευρές της νεοκλασικής θεωρίας – δηλαδή τις έννοιες του οριακού προϊόντος του κεφαλαίου F_K και του οριακού προϊόντος της εργασίας F_L – τις έχουμε ήδη εντοπίσει στο σχήμα 17. Όπως θα θυμόμαστε, ο μεσολαβητικός ρόλος των δύο αυτών εννοιών εκφράζεται από την αρχή της οριακής παραγωγικότητας 38 σύμφωνα με την οποία τα οριακά προϊόντα των συντελεστών παραγωγής K και L εξισώνονται (υπό καθεστώς τέλειου ανταγωνισμού) με τις πραγματικές τιμές εκμίσθωσής τους που είναι, αντίστοιχα, το ποσοστό κέρδους r και ο μισθός w:

$$F_K = r \text{ και } F_L = w \qquad (38')$$

όπου $r = \overline{r}/p$ και $w = \overline{w}/p$. Συνεπώς, για να εκτιμήσουμε γεωμετρικά στο σχήμα 17 το μέγεθος του ποσοστού κέρδους r και το μέγεθος του μισθού w (και τα δύο σε πραγματικούς όρους) αρκεί να προσθέσουμε δίπλα στα σύμβολα F_K και F_L τα ισοδύναμά τους r και w. Εάν θέλαμε μάλιστα να υπολογίσουμε τα μεγέθη r και w που αντιστοιχούν σε έναν δοσμένο συνδυασμό των συντελεστών παραγωγής K και L (δηλαδή σε μια δοσμένη τεχνική ή, αλλιώς, σε μια δοσμένη τιμή της έντασης κεφαλαίου $k = K/L$), θα εκτελούσαμε απλώς τις πράξεις που μας υπαγορεύουν οι εκφράσεις 53 και 54, έχοντας βέβαια φροντίσει προηγουμένως να αντικαταστήσουμε στις εκφράσεις αυτές τα σύμβολα F_K και F_L με τα σύμβολα r και w:

$$r = f'(k) \qquad (53΄)$$

$$w = f(k) - kf'(k) \qquad (54΄)$$

Το γεγονός ότι είμαστε πλέον σε θέση να εντοπίζουμε στο σχήμα 17 το ποσοστό κέρδους r και τον μέσο μισθό w που αντιστοιχούν σε κάθε δοσμένη τεχνική (δηλαδή σε κάθε δοσμένη τιμή του λόγου κεφαλαίου-εργασίας k), μπορούμε να το χρησιμοποιήσουμε τώρα ως αφετηρία για να αποτυπώσουμε, στο ίδιο σχήμα, και την νεοκλασική θεωρία της διανομής. Όπως θα θυμόμαστε, η θεωρία αυτή προβλέπει ότι, υπό καθεστώς σταθερών αποδόσεων κλίμακας, το συνολικό καθαρό εισόδημα (το οποίο ισούται με το συνολικό καθαρό προϊόν Y) διανέμεται εξ ολοκλήρου με την μορφή μισθών W και κερδών Π ($Y = W + \Pi$) στους ιδιοκτήτες των συντελεστών παραγωγής L και K, όπου για το σύνολο των μισθών W και για το σύνολο των κερδών Π ισχύει, βάσει της αρχής της οριακής παραγωγικότητας, ότι

$$W = wL = F_L L \text{ και } \Pi = rK = F_K K .$$

Για να δούμε πώς ακριβώς αποτυπώνεται στο σχήμα 17 η διανεμητική σχέση $Y = W + \Pi$, θα πρέπει πρώτα να την αναδιατυπώσουμε σε ανά εργαζόμενο όρους, διαιρώντας και τις δύο πλευρές της με $L : Y/L = W/L + \Pi/L$. Με την εισαγωγή στην έκφραση αυτή των ορισμών $Y/L = y$, $W/L = wL/L = w$ και $\Pi/L = rK/L = rk$ έχουμε την ανά εργαζόμενο διατύπωση της διανεμητικής σχέσης $Y = W + \Pi$:

$$y = w + rk \qquad (56)$$

όπου y το συνολικά παραγόμενο εισόδημα ανά εργαζόμενο Y/L, w το σύνολο των μισθών ανά εργαζόμενο W/L (δηλαδή ο μέσος μισθός w) και rk το σύνολο των κερδών ανά εργαζόμενο Π/L.

Για να εντοπίσουμε την γεωμετρική απεικόνιση της σχέσης 56 στο σχήμα 17 αρκεί να επανεξετάσουμε, στο σχήμα αυτό, την σημασία των αποστάσεων ΔΓ και ΓΑ καθώς και του αθροίσματός τους ΔΑ, τούτη τη φορά όχι από την σκοπιά της παραγωγής αλλά από την σκοπιά της διανομής. Δεν χρειάζεται και πολλή σκέψη για να διαπιστώσει κανείς ότι το άθροισμα $ΔΑ = ΔΓ + ΓΑ$ στο σχήμα 17 δεν είναι τίποτε άλλο παρά η γεωμετρική απεικόνιση της ανά εργαζόμενο διανεμητικής σχέσης $y = w + rk$. Η απόσταση ΔΑ μας δείχνει το μέγεθος του συνολικά παραγόμενου εισοδήματος ανά εργαζόμενο y ($= Y/L$), ενώ η απόσταση ΔΓ μας δείχνει τον μέσο μισθό w (δηλαδή, το σύνολο των μισθών ανά εργαζόμενο $W/L = wL/L = w$). Το ότι η απόσταση ΓΑ μας δείχνει το σύνολο των κερδών ανά εργαζόμενο rk ($= rK/L = \Pi/L$) προκύπτει από μια διαπίστωση που έγινε προηγουμένως σύμφωνα με την οποία η πλευρά του ορθογωνίου τριγώνου ΓΑ ισούται με το γινόμενο $kf'(k)$. Εάν στην έκφραση $ΓΑ = kf'(k)$ αντικαταστήσουμε $k = K/L$ και $f'(k) = F_K = r$, τότε έχουμε $ΓΑ = rK/L = rk$.

Σε ό.τι αφορά τις ιδιότητες της καμπύλης $y = f(k)$ στο σχήμα 17 θα θέλαμε να επισημάνουμε τελικά τη νέα σημασία που αποκτά η ελαστικότητα της καμπύλης αυτής στο πλαίσιο της θεωρίας της διανομής. Δείξαμε προηγουμένως (βλ. 55) ότι η ελαστικότητα αυτή (που την συμβολίσαμε με ε_k) ισούται με την μερική ελαστικότητα της παραγωγής ως προς K ($\varepsilon_k = \varepsilon_K$). Όμως, η εκμίσθωση των συντελεστών παραγωγής βάσει της αρχής της οριακής παραγωγικότητας συνεπάγεται (βλ. 42) ότι η μερική ελαστικότητα ε_K ισούται με το μερίδιο των κερδών α_Π ($\varepsilon_K = \alpha_\Pi = \Pi/Y$). Αφού λοιπόν $\varepsilon_k = \varepsilon_K$ και $\varepsilon_K = \alpha_\Pi$, είναι προφανές ότι η ελαστικότητα της καμπύλης $y = f(k)$ θα πρέπει να ισούται με το μερίδιο των κερδών Π στο συνολικό εισόδημα Y: $\varepsilon_k = \alpha_\Pi = \Pi/Y$.

4.6. Ρυθμοί μεγέθυνσης II

(α) Παραγωγή, διανομή και μεγέθυνση υπό καθεστώς σταθερών αποδόσεων κλίμακας

Στην §4.3.γ ασχοληθήκαμε αρκετά λεπτομερώς με την γραφική απεικόνιση της τρισδιάστατης συνάρτησης παραγωγής $Y = F(K, L)$ μέσω των τριών δισδιάστατων διαγραμμάτων του σχήματος 8. Αργότερα, στην ενότητα §4.4.α, μας δόθηκε η ευκαιρία να διαπιστώσουμε πόσο περίπλοκα γίνονται τα διαγράμματα αυτά την στιγμή που θελήσει κανείς να τα χρησιμοποιήσει για να καταγράψει σχηματικά τις επιπτώσεις που έχει στην **παραγωγή** και, μέσω αυτής, και στην **διανομή** η διαδικασία της οικονομικής **μεγέθυνσης**. Από άποψη περιγραφική και στο στενό πλαίσιο της μακροοικονομικής συνάρτησης παραγωγής $Y = F(K, L)$, η διαδικασία αυτή εκφράζεται από την συνεχή αύξηση του συνολικού προϊόντος και του συνολικού εισοδήματος Y. Στο βαθμό που παραβλέπουμε την επίδραση της τεχνικής προόδου, αυτή η συνεχής αύξηση της παραγωγής και του εισοδήματος Y φαίνεται να τροφοδοτείται, αποκλειστικά και μόνον, από την αύξηση του αποθέματος μέσων παραγωγής K (συσσώρευση κεφαλαίου) και από την αύξηση της απασχόλησης εργατικού δυναμικού L. Ας σημειωθεί ότι εδώ αναφερόμαστε μόνον στην **περιγραφή** των επιπτώσεων της οικονομικής μεγέθυνσης και όχι στην **θεωρία** της οικονομικής μεγέθυνσης, η οποία ασχολείται με την διερεύνηση των παραγόντων που καθορίζουν την διαχρονική μεταβολή του αποθέματος κεφαλαίου K και της απασχόλησης L.

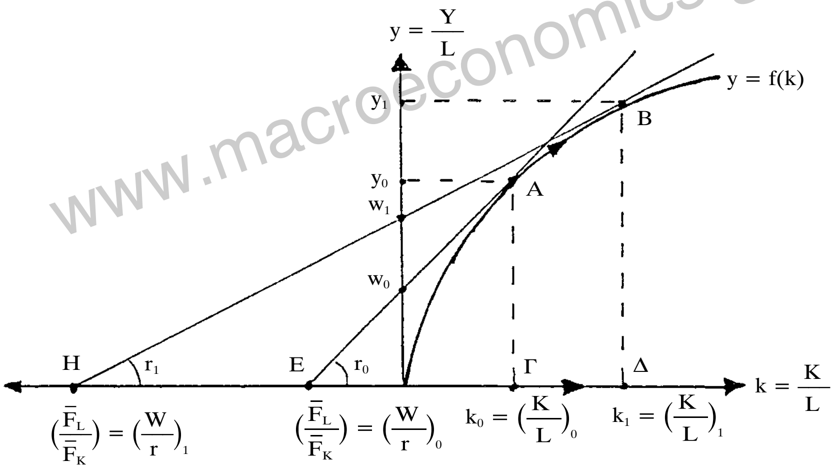
Οι δυσκολίες που έχει να αντιμετωπίσει η περιγραφή των επιπτώσεων της οικονομικής μεγέθυνσης μέσω των διαγραμμάτων του σχήματος 8 έχουν να κάνουν με το γεγονός ότι οι καμπύλες που απεικονίζονται στα διαγράμματα αυτά παύουν πλέον να παραμένουν στάσιμες. Με την πάροδο του χρόνου, καθώς αυξάνονται συνεχώς οι τιμές των μεταβλητών $\mathring{K}$ και $\mathring{L}$ (και, συνεπώς, και οι τιμές της μεταβλητής Y), οι καμπύλες αυτές μετατοπίζονται διαρκώς προς τα πάνω. Την **δυναμική** αυτή διαδικασία προσπαθήσαμε να την παρουσιάσουμε σχηματικά με τις μετατοπίσεις που καταγράφονται στα τρία διαγράμματα του σχήματος 14. Αντίστοιχες μετατοπίσεις θα υφίσταται προφανώς και η καμπύλη υποκατάστασης στο σχήμα 9.β., αφού η καμπύλη αυτή προκύπτει από μια καμπύλη ίσου προϊόντος, η οποία μετατοπίζεται συνεχώς στην διάρκεια του χρόνου (βλ. σχήμα 14.γ). Είναι σαφές, ότι οι συνεχείς μετατοπίσεις όλων αυτών των καμπυλών καθιστούν πρακτικά αδύνατη την παρακολούθηση των μεταβολών που υφίστανται διαχρονικά τα διάφορα γεωμετρικά τους χαρακτηριστικά που αντιστοιχούν σε κεντρικές έννοιες της θεωρίας της παραγωγής και της διανομής, όπως είναι λ.χ. οι έννοιες: μέσα και οριακά προϊόντα, μερικές ελαστικότητες της παραγωγής, τιμές εκμίσθωσης και ελαστικότητα υποκατάστασης των συντελεστών παραγωγής, εισοδηματικά μερίδια κλπ.

Όλες αυτές οι δυσκολίες εξαφανίζονται ως δια μαγείας την στιγμή που υποθέσουμε, ότι η συνάρτηση παραγωγής είναι γραμμικά ομογενής (σταθερές αποδόσεις κλίμακας). Όπως δείξαμε προηγουμένως, η παραδοχή αυτή μας επιτρέπει να συμπτύξουμε και τα τρία διαγράμματα του σχήματος 8 σε ένα και μόνο διάγραμμα που περιλαμβάνει μία και μόνο καμπύλη – και συγκεκριμένα την καμπύλη της συνάρτησης $y = f(k)$ – η οποία διαθέτει το μεγάλο πλεονέκτημα να παραμένει διαχρονικά **στάσιμη**[38]. Η ταυτόχρονη μεταβολή του αποθέματος κεφαλαίου K και της απασχόλησης L δεν επηρεάζει την μορφή και την θέση της καμπύλης $y = f(k)$ στο σχήμα 17 αλλά εκφράζεται μόνον ως μεταβολή της έντασης κεφαλαίου k κατά μήκος του οριζόντιου άξονα. Από τον ορισμό $k = K/L$ προκύπτει αμέσως ότι η ταυτόχρονη αύξηση των μεταβλητών K και L θα έχει ως συνέπεια να αυξηθεί, να μειωθεί ή να παραμείνει σταθερό το αρχικό μέγεθος της έντασης κεφαλαίου k, ανάλογα με το εάν το απόθεμα κεφαλαίου K αυξάνεται με μεγαλύτερο, με μικρότερο ή με τον ίδιο ρυθμό σε σύγκριση με τον ρυθμό αύξησης της απασχόλησης L. Τούτο μπορεί να επιβεβαιωθεί και τυπικά με την βοήθεια του κανόνα 18. Εάν το απόθεμα κεφαλαίου αυξάνεται με τον ρυθμό g_K και η απασχόληση με τον ρυθμό g_L, τότε η ένταση κεφαλαίου k $(= K/L)$ θα μεταβάλλεται με έναν ρυθμό g_k για τον οποίο θα πρέπει να ισχύει: $g_k = g_K - g_L$. Από την σχέση αυτή συμπεραίνουμε αμέσως πως η ένταση κεφαλαίου k θα αυξάνεται $(g_k > 0)$, θα μειώνεται $(g_k < 0)$ ή θα παραμένει σταθερή $(g_k = 0)$, ανάλογα με το εάν ο ρυθμός συσσώρευσης κεφαλαίου g_K είναι μεγαλύτερος, μικρότερος ή ίσος του ρυθμού αύξησης της απασχόλησης g_L. Αν ήταν να διατυπώσουμε το συμπέρασμα αυτό σε όρους του σχήματος 17, θα λέγαμε ότι συνέπεια της αύξησης του αποθέματος κεφαλαίου K με έναν ρυθμό μεγαλύτερο, μικρότερο ή ίσο του ρυθμού αύξησης της απασχόλησης L είναι να μετακινηθεί προς τα δεξιά, προς τα αριστερά, ή να μην μετακινηθεί καθόλου το σημείο Δ, του οποίου η απόσταση από την αρχή των αξόνων (απόσταση ΟΔ) εκφράζει το αρχικό μέγεθος της έντασης κεφαλαίου $k = K/L$.

[38] Όσο βέβαια εξακολουθούμε να αγνοούμε την επίδραση της «τεχνικής προόδου». Διότι διαφορετικά, η συνάρτηση $y = f(k)$ θα πρέπει, σύμφωνα με τα όσα λέχθηκαν στην §4.4.β να αντικατασταθεί από την παραμετρικά (ως προς τον χρόνο t) διευρυμένη εκδοχή της: $y = f(k,t)$. Τούτο σημαίνει ότι η καμπύλη της συνάρτησης $y = f(k,t)$ στο σχήμα 17 θα πρέπει, με την πάροδο του χρόνου t, να μετατοπίζεται συνεχώς προς τα πάνω.

Στο σημείο αυτό θα ήταν χρήσιμο να γίνει μια σύντομη αναφορά στις ειδικές ονομασίες που έχουν δοθεί, στο πλαίσιο της θεωρίας της οικονομικής μεγέθυνσης, σε αυτές τις τρεις διαφορετικές δυνατότητες διαχρονικής συμπεριφοράς της έντασης κεφαλαίου k. Όταν γίνεται λόγος για την περίπτωση διαχρονικής αύξησης της έντασης κεφαλαίου, λέγεται συχνά ότι πρόκειται για μια διαδικασία **εμβάθυνσης κεφαλαίου** (capital deepening). Αυτό που υπονοείται εδώ είναι ότι, με την αύξηση του λόγου K/L, η διαδικασία παραγωγής γίνεται όλο και πιο εντατική (πιο «βαθιά») σε ό,τι αφορά την χρησιμοποίηση κεφαλαιουχικού εξοπλισμού: κάθε εργαζόμενος εξοπλίζεται, κατά μέσο όρο, με ένα όλο και πιο μεγάλο (ή, ακριβέστερα, με ένα όλο και πιο μεγάλης αξίας) απόθεμα μέσων παραγωγής. Την διαδικασία διαχρονικής μείωσης του λόγου κεφαλαίου-εργασίας K/L, η οποία είναι ακριβώς το αντίθετο της ξεβάθυνσης κεφαλαίου, μπορεί κανείς, σε αντιστοιχία με την τελευταία, να την αποκαλέσει (τελείως άκομψα βέβαια) και διαδικασία **αποβάθυνσης κεφαλαίου** (capital shallowing). Από πλευράς χρήσης κεφαλαιουχικού εξοπλισμού, η παραγωγική διαδικασία γίνεται τώρα όλο και λιγότερο εντατική, δηλαδή όλο και πιο «ρηχή», με την έννοια ότι τώρα κάθε εργαζόμενος χρησιμοποιεί μιαν όλο και πιο μικρή ποσότητα μέσων παραγωγής. Τελικά, μια διαδικασία που έχει ως συνέπεια την διαχρονική σταθερότητα του λόγου κεφαλαίου-εργασίας K/L, την χαρακτηρίζουμε επίσης και ως διαδικασία **διεύρυνσης κεφαλαίου** (capital widening). Εδώ, το απόθεμα κεφαλαίου διευρύνεται με τον ίδιο ακριβώς ρυθμό με τον οποίο διευρύνεται και το απασχολούμενο εργατικό δυναμικό. Για τον λόγο αυτό, κάθε εργαζόμενος χρησιμοποιεί πάντοτε την ίδια ποσότητα μέσων παραγωγής και αυτό, παρά το γεγονός, ότι ο αριθμός των εργαζομένων αυξάνεται συνεχώς.

Στηριζόμενοι στις διευκρινήσεις που προηγήθηκαν, θα δείξουμε τώρα πώς μπορεί κανείς να χρησιμοποιήσει το σχήμα 17 για να μελεετήσει την επίδραση που ασκεί στην παραγωγή και στην διανομή η διαδικασία της οικονομικής μεγέθυνσης. Εδώ θα ασχοληθούμε μόνο με την περίπτωση όπου η διαδικασία αυτή εκδηλώνεται με τη μορφή εμβάθυνσης κεφαλαίου (διαχρονική αύξηση της έντασης κεφαλαίου). Όμως, τα επιχειρήματα που θα αναπτυχθούν σε σχέση με την περίπτωση αυτή ισχύουν επίσης, με τις ανάλογες τροποποιήσεις, και για τις περιπτώσεις διαχρονικής μείωσης και διαχρονικής σταθερότητας της έντασης κεφαλαίου. Θα ξεκινήσουμε υποθέτοντας ότι, σε μιαν ορισμένη χρονική στιγμή t_0 το μέγεθος της έντασης κεφαλαίου είναι k_0 (βλ. σχήμα 18) και ότι, από την στιγμή αυτή έως μιαν επόμενη στιγμή t_1, το απόθεμα κεφαλαίου K αυξάνεται με έναν ρυθμό που είναι υψηλότερος του ρυθμού με τον οποίο αυξάνεται η απασχόληση L. Αν θέλαμε μάλιστα να συνδέσουμε το παράδειγμά μας με τα όσα είπαμε στην §4.3.β σχετικά με την υποκαταστασιμότητα των συντελεστών παραγωγής, θα μπορούσαμε να είχαμε υποθέσει, ότι ο ρυθμός μεταβολής του αποθέματος κεφαλαίου είναι θετικός, ενώ ο ρυθμός μεταβολής της απασχόλησης είναι αρνητικός, πράγμα που θα σήμαινε ότι, στην παραγωγική διαδικασία, ο συντελεστής παραγωγής κεφάλαιο υποκαθιστά, έως έναν βαθμό, τον συντελεστή παραγωγής εργασία. Όπως και να έχουν τα πράγματα, γεγονός είναι ότι, και στις δύο περιπτώσεις, δεν πρόκειται να αλλοιωθεί ή να μετατοπισθεί η καμπύλη $y = f(k)$ στο σχήμα 18. Το μόνο που θα μεταβληθεί θα είναι το μέγεθος της έντασης κεφαλαίου, το οποίο θα διαμορφωνθεί σε ένα επίπεδο k_1 που θα είναι σαφώς υψηλότερο του αρχικού k_0 $(k_1 > k_0)$. Η μεταβολή αυτή θα εκφρασθεί στο σχήμα 18 με την μετάβαση, κατά μήκος του οριζόντιου άξονα, από το σημείο Γ στο σημείο Δ, προκαλώντας έτσι και την μετάβαση από το σημείο Α της καμπύλης $y = f(k)$ στο σημείο Β. Με την βοήθεια των εννοιών που έχουμε ήδη εντοπίσει γεωμετρικά στο σχήμα 17, μπορούμε τώρα να εντοπίσουμε αμέσως στο σχήμα 18 και τις επιπτώσεις της αύξησης της έντασης κεφαλαίου στην παραγωγή, στις τιμές των συντελεστών παραγωγής και, τελικά, και στην διανομή.



Σχήμα 18.

Αρχίζουμε με τις επιπτώσεις στην σφαίρα της **παραγωγής**. Συγκρίνοντας τις θέσεις των σημείων Α και Β στο σχήμα 18 διαπιστώνουμε αμέσως ότι η αύξηση της έντασης κεφαλαίου k έχει ως συνέπεια την αύξηση του προϊόντος (και συνεπώς και του εισοδήματος) ανά εργαζόμενο y. Την επίπτωση αυτή μπορούμε να την διατυπώσουμε και σε όρους του διαφορικού λογισμού, λέγοντας ότι το πρόσημο της παραγώγου dy/dk θα πρέπει να είναι θετικό. Τούτο είναι βέβαια προφανές, αφού η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης $y = f(k)$ δεν είναι τίποτε άλλο παρά το οριακό προϊόν του κεφαλαίου (βλ. 53), το οποίο υποθέτουμε πως είναι πάντοτε ένας θετικός αριθμός $(dy/dk = f'(k) > 0)$. Αυτόν τον θετικό συσχετισμό ανάμεσα στην αύξηση της παραγωγικότητας της εργασίας (dy) και στην αύξηση της έντασης κεφαλαίου (dk) μπορούμε να τον εκφράσουμε και σε όρους ποσοστιαίων μεταβολών (ρυθμών μεγέθυνσης). Παραγωγίζοντας την συνάρτηση $y = f(k)$ ως προς τον χρόνο t και διαιρώντας και τις δύο πλευρές του αποτελέσματος με $y\,(= f(t))$ έχουμε:

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dt}=\frac{f'(k)}{f(k)}\frac{dk}{dt}.$$

Εάν διαιρέσουμε και πολλαπλασιάσουμε ταυτόχρονα την δεξιά πλευρά της έκφρασης αυτής με k και εάν λάβουμε υπόψη το γεγονός ότι η έκφραση $kf'(k)/f(k)$ είναι η ελαστικότητα της $y=f(k)$ καθώς και το γεγονός ότι η ελαστικότητα αυτή ισούται με ε_K, την μερική ελαστικότητα της $Y=F(K,L)$ ως προς K (βλ. 55), τότε καταλήγουμε στην έκφραση

$$g_y=\varepsilon_K g_k, \tag{57}$$

η οποία μας δείχνει την θετική σχέση ($\varepsilon_K>0$) ανάμεσα στον ρυθμό μεγέθυνσης του προϊόντος ανά εργαζόμενο g_y $(=(dy/dt)/y)$ και στον ρυθμό μεγέθυνσης της έντασης κεφαλαίου g_k $(=(dk/dt)/k)$. Ας σημειωθεί ότι η έκφραση 57 προκύπτει επίσης και από την έκφραση 31, εάν σε αυτήν εισαχθεί η παραδοχή περί σταθερών αποδόσεων κλίμακας, μια παραδοχή που μας επέτρεψε να αναδιατυπώσουμε την συνάρτηση παραγωγής $Y=F(K,L)$ σε εντατικούς όρους, αντικαθιστώντας την με την συνάρτηση $y=f(k)$. Επειδή, στην περίπτωση αυτή, το άθροισμα των μερικών ελαστικοτήτων της παραγωγής ε_K και ε_L ισούται με την μονάδα (βλ. 44), μπορούμε να αντικαταστήσουμε στην έκφραση 31 την ελαστικότητα ε_L με το ισοδύναμό της $1-\varepsilon_K$. Έτσι η 31 αποκτά τώρα την μορφή

$$g_Y-g_L=\varepsilon_K(g_K-g_L),$$

η οποία μας οδηγεί αμέσως στην 57, αφού για τους ρυθμούς μεγέθυνσης των λόγων $y=Y/L$ και $k=K/L$ ισχύει, σύμφωνα με τον κανόνα του πηλίκου (βλ. 18), ότι:

$$g_Y-g_L=g_y \text{ και } g_K-g_L=g_k.$$

Ας σημειωθεί επίσης ότι η σχέση 57 μπορεί εύκολα να διευρυνθεί έτσι, ώστε να συμπεριλαμβάνεται σ' αυτήν και η συμβολή της τεχνικής προόδου στην αύξηση της παραγωγικότητας y $(=Y/L)$. Αντικαθιστώντας στην έκφραση 32 τον όρο ε_L με τον όρο $1-\varepsilon_K$, καταλήγουμε στην γενικευμένη εκδοχή της 57

$$g_y=\varepsilon_K g_k+m, \tag{57΄}$$

όπου $\varepsilon_K g_k=\varepsilon_K(g_K-g_L)$ η συνδυασμένη συμβολή της συσσώρευσης κεφαλαίου και της απασχόλησης στην αύξηση της παραγωγικότητας και m η συμβολή της τεχνικής προόδου. Τελικά θα πρέπει να σημειωθεί ότι η 56΄ μπορεί να διατυπωθεί και σε όρους διανομής του εισοδήματος, αφού (βλ. 42) η μερική ελαστικότητα της παραγωγής ε_K ισούται, σύμφωνα με την νεοκλασική λογική, με το μερίδιο των κερδών α_Π $(=\Pi/Y)$:

$$g_y=\alpha_\Pi g_k+m. \tag{56΄΄}$$

Αφήνοντας κατά μέρος το θέμα της τεχνικής προόδου, επανερχόμαστε τώρα στο σχήμα 18 για να εξετάσουμε την επίδραση που ασκεί η μεταβολή της έντασης κεφαλαίου στις **τιμές εκμίσθωσης** των συντελεστών παραγωγής. Συγκρίνοντας την κλίση των εφαπτομένων ευθειών στα σημεία Α και Β καθώς και τις τομές των ευθειών αυτών με τον κάθετο άξονα, βλέπουμε ότι η αύξηση της έντασης κεφαλαίου k θα έχει ως συνέπεια:

- πρώτον, την μείωση του οριακού προϊόντος του κεφαλαίου F_K και, ως εκ τούτου, και την μείωση του μέσου ποσοστού κέρδους $r\ (=F_K)$ και
- δεύτερον, την αύξηση του οριακού προϊόντος της εργασίας F_L και, για τον λόγο αυτό, και την αύξηση του μέσου μισθού $w\ (=F_L)$.

Επειδή έχουμε ήδη προσδιορίσει τις συναρτησιακές σχέσεις που συνδέουν τις μεταβλητές r και w με την μεταβλητή k (βλ. 53΄ και 54΄) μπορούμε να διατυπώσουμε τις θέσεις περί πτωτικής τάσης του ποσοστού κέρδους και περί ανοδικής τάσης του μέσου μισθού και στην γλώσσα του διαφορικού λογισμού. Έτσι θα λέγαμε ότι η επίπτωση μιας αύξησης του λόγου κεφαλαίου-εργασίας k στο ποσοστό κέρδους r και στο μέσο μισθό w θα πρέπει να εκφράζονται, αντίστοιχα, από τις συνθήκες $dr/dk<0$ και $dw/dk>0$. Η ισχύς της πρώτης συνθήκης είναι σχεδόν αυτονόητη. Η παραγώγιση της 53΄ μας οδηγεί στην έκφραση $dr/dk=f''(k)$, από την οποία προκύπτει ότι $dr/dk<0$, αφού η παραδοχή περί θετικού και φθίνοντος οριακού προϊόντος του κεφαλαίου προϋποθέτει πως $f'(k)>0$ και $f''(k)<0$. Παραγωγίζοντας τελικά και την συνάρτηση 54΄ έχουμε την έκφραση

$$\frac{dw}{dk}=f'(k)-[kf''(k)+f'(k)]=-kf''(k),$$

από την οποία προκύπτει ότι $dw/dk>0$, αφού $-kf''(k)>0$, δεδομένου ότι $k>0$ και $f''(k)<0$.

Απομένει τελικά να δούμε πώς επηρεάζεται από την μεταβολή της έντασης κεφαλαίου $k=K/L$ η **διανομή του εισοδήματος** Y μεταξύ μισθών W και κερδών Π ($Y=W+\Pi$). Ας ορίσουμε ως δείκτη της διανομής του εισοδήματος τον λόγο Π/W, τον οποίο θα τον συμβολίσουμε με το ελληνικό γράμμα η ($\eta=\Pi/W$)[39]. Το γεγονός ότι για το σύνολο των κερδών ισχύει $\Pi=rK$ και για το σύνολο των μισθών $W=wL$ μας επιτρέπει να διατυπώσουμε τον δείκτη η ως το γινόμενο του λόγου κεφαλαίου-εργασίας $k=K/L$ και του λόγου των τιμών εκμίσθωσης του κεφαλαίου και της εργασίας r/w:

$$\eta=\left(\frac{r}{w}\right)\left(\frac{K}{L}\right). \tag{58}$$

Κοιτάζοντας τους δύο όρους του γινομένου, στην δεξιά πλευρά της έκφρασης 58, φαίνεται εκ πρώτης όψεως πως η αύξηση της έντασης κεφαλαίου $k=K/L$ θα επηρεάσει την διανομή του εισοδήματος προς όφελος των κερδών, αυξάνοντας την αριθμητική τιμή του δείκτη η. Όμως η εντύπωση αυτή είναι απατηλή καθότι αγνοείται το γεγονός,

---

[39] Είναι προφανές ότι ο διανεμητικός δείκτης η ισούται και με τον λόγο των εισοδηματικών μεριδίων $\alpha_\Pi\ (=\Pi/Y)$ και $\alpha_w\ (=W/Y=1-\Pi/Y)$:

$$\eta=\frac{\Pi}{W}=\frac{\Pi/Y}{W/Y}=\frac{\alpha_\Pi}{\alpha_w}=\frac{\alpha_\Pi}{1-\alpha_\Pi}.$$

ότι από την μεταβολή του λόγου K/L θα επηρεασθεί και ο άλλος όρος του γινομένου που είναι ο λόγος r/w. Δείξαμε προηγουμένως, πως η αύξηση της έντασης κεφαλαίου οδηγεί στην αύξηση του μισθού w $(=F_L)$ και στην μείωση του ποσοστού κέρδους r $(=F_K)$. Τούτο βέβαια σημαίνει ότι η αύξηση του λόγου K/L οδηγεί στην αύξηση του λόγου w/r $(=F_L/F_K)$, πράγμα που φαίνεται αμέσως από την σύγκριση της απόστασης των σημείων Ε και Η από την αρχή των αξόνων στο σχήμα 18. Αφού όμως η αύξηση του λόγου K/L συνεπάγεται την αύξηση του λόγου w/r, θα συνεπάγεται προφανώς και την μείωση του λόγου r/w $(=F_K/F_L)$. Η ύπαρξη αυτής της **αντίστροφης σχέσης** ανάμεσα στον λόγο r/w και στον λόγο K/L είναι και η αιτία για την οποία δεν είναι εκ προϊμίου σαφές, εάν μια αύξηση της έντασης κεφαλαίου K/L θα αυξήσει, θα μειώσει ή θα αφήσει αμετάβλητη την αριθμητική τιμή του δείκτη η (βλ. 58), λειτουργώντας έτσι προς όφελος των κερδών, ή προς όφελος των μισθών ή παραμένοντας διανεμητικά ουδέτερη. Επειδή η αύξηση του όρου K/L οδηγεί ταυτόχρονα και στην μείωση του λόγου r/w, η τελική επίδραση μιας αύξησης του λόγου K/L στην αριθμητική τιμή του γινομένου $(r/w)(K/L)$ θα εξαρτηθεί από το πόσο ελαστική ή ανελαστική θα είναι η αντίδραση του λόγου r/w σε μεταβολές του λόγου K/L.

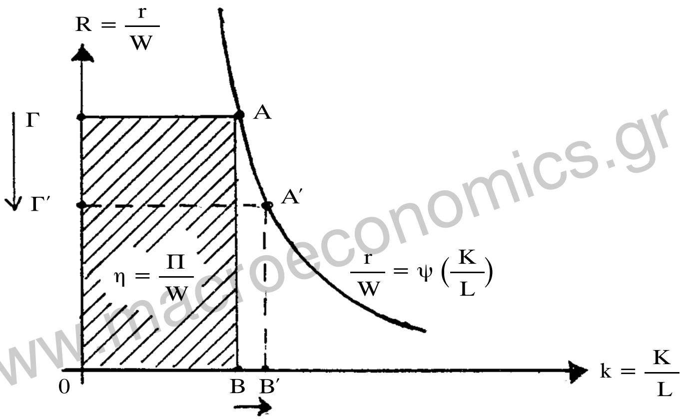
Η διερεύνηση του ζητήματος αυτού διευκολύνεται κατά πολύ, εάν δώσουμε στην αντίστροφη σχέση ανάμεσα στα μεγέθη r/w και K/L συναρτησιακή μορφή. Για τον λόγο αυτό γράφουμε

$$\frac{r}{w} = \psi\left(\frac{K}{L}\right) \tag{59}$$

υποθέτοντας, βέβαια, ότι η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης αυτής θα πρέπει να είναι αρνητική $(\psi'(K/L) < 0)$, πράγμα που σημαίνει ότι η καμπύλη της θα πρέπει να έχει φθίνουσα μορφή (βλ. σχήμα 19)[40]. Αυτό που θα θέλαμε να τονίσουμε στο σημείο αυτό είναι ότι η καμπύλη της συνάρτησης 59 στο σχήμα 19 δεν είναι τίποτε άλλο παρά μια **καμπύλη υποκατάστασης**, όμοια με αυτήν για την οποία μιλήσαμε στην §4.3.γ και την οποία σχεδιάσαμε στο σχήμα 9.β. Αν και στα δύο αυτά σχήματα καταγράφεται ουσιαστικά ο ίδιος συσχετισμός, το σχήμα 9.β τον καταγράφει από την σκοπιά της **παραγωγής** ενώ το σχήμα 19 από την σκοπιά της **διανομής**. Αυτός είναι και ο λόγος για τον οποίο αλλάζει η **ονομασία** του κάθετου άξονα κατά την μετάβαση από το σχήμα 9.β στο σχήμα 19. Στον κάθετο άξονα του σχήματος 9.β, ο οριακός λόγος τεχνικής υποκατάστασης R $(=-dL/dK)$ εμφανίζεται με την μορφή του λόγου των οριακών προϊόντων των συντελεστών παραγωγής $(R = F_K/F_L)$. Όμως, επειδή η νεοκλασική μετάβαση από

[40] Ας σημειωθεί ότι η καμπύλη του σχήματος 19 έχει έτσι σχεδιαστεί, ώστε να είναι όχι μόνον φθίνουσας μορφής αλλά και κυρτή ως προς την αρχή των αξόνων. Δεν είναι και πολύ δύσκολο να αποδείξει κανείς (πράγμα που δεν θα επιχειρήσουμε την στιγμή αυτή) ότι η ιδιαίτερη αυτή κυρτότητα της καμπύλης $r/w = \psi(K/L)$ στο σχήμα 19 είναι απόρροια της παραδοχής ότι η καμπύλη $y = f(k)$ στο σχήμα 18 είναι κυρτή ως προς τον οριζόντιο άξονα.

την θεωρία της παραγωγής στην θεωρία της διανομής μεσολαβείται από την αρχή της εκμίσθωσης των συντελεστών παραγωγής σύμφωνα με το οριακό τους προϊόν ($F_K = r$, $F_L = w$), ο οριακός λόγος τεχνικής υποκατάστασης R εμφανίζεται, στον κάθετο άξονα του σχήματος 19, με την μορφή του λόγου των τιμών εκμίσθωσης των συντελεστών παραγωγής ($R = r/w$).



Σχήμα 19.

Ωστόσο, πέρα από την διαφορά στην ονομασία του κάθετου άξονά τους, τα σχήματα 9.β και 19 διαφέρουν μεταξύ τους και ως ένα δεύτερο σημείο, το οποίο αναφέρεται σε ζητήματα ουσίας και όχι απλώς ονομασίας. Όταν, ξεκινώντας από τις παραδοχές περί διπλής παραγωγισιμότητας και κυρτότητας της συνάρτησης $Y = F(K, L)$, κατασκευάζαμε την καμπύλη υποκατάστασης στο σχήμα 9.β, τονίσαμε επανειλημμένως ότι η κατασκευή αυτή ισχύει για ένα δοσμένο επίπεδο προϊόντος $\overline{Y}$. Συνεπώς, η καμπύλη στο σχήμα 9.β θα πρέπει να **μετατοπίζεται** συνεχώς προς τα πάνω και να αλλάζει ενδεχομένως και μορφή, καθώς αυξάνεται το μέγεθος του προϊόντος Y, εξαιτίας της συνεχούς μεταβολής που υφίσταται διαχρονικά το μέγεθος του αποθέματος κεφαλαίου K και της απασχόλησης L. Προηγουμένως δείξαμε, όμως, ότι η καμπύλη υποκατάστασης στο σχήμα 19 δεν επηρεάζεται από την διαχρονική μεταβολή των μεταβλητών K και L, αλλά παραμένει διαχρονικά **στάσιμη**. Και αυτό επειδή η καμπύλη αυτή προκύπτει κατασκευαστικά (αλλά και αναλυτικά) από την διαχρονικά στάσιμη καμπύλη της συνάρτησης $y = f(k)$ που απεικονίζεται στο σχήμα 18. Και όπως θα θυμόμαστε, η στασιμότητα της καμπύλης $y = f(k)$ – και συνεπώς και της παραγώγου της που είναι η καμπύλη $r/w = \psi(K/L)$ στο σχήμα 19.β – εξασφαλίζεται μόνον υπό τον όρο ότι η συνάρτηση παραγωγής $Y = F(K, L)$ είναι όχι μόνον διπλά παραγωγίσιμη και κυρτή αλλά, ταυτόχρονα, και ομογενής και μάλιστα ομογενής πρώτου βαθμού (σταθερές αποδόσεις κλίμακας).

Εδώ θα ανοίξουμε μια σύντομη παρένθεση για να επισημάνουμε το γεγονός ότι η συνάρτηση $r/w = \psi(K/L)$ αποτελεί ένα είδος συνάρτησης ζήτησης, ανάλογης με την συνάρτηση ζήτησης $p = p(x)$ που παρουσιάζεται σε κάθε εγχειρίδιο εισαγωγής στην Μικροοικονομική. Ενώ, στο πλαίσιο της θεωρίας της επιχείρησης, η συνάρτηση $p = p(x)$ εκφράζει την αντίστροφη σχέση ανάμεσα στην ζήτηση (ή, ακριβέστερα, στην ζητούμενη ποσότητα) ενός συντελεστή παραγωγής και στην τιμή εκμίσθωσής του, η συνάρτηση $r/w = \psi(K/L)$ εκφράζει την αντίστροφη σχέση ανάμεσα στην **σχετική ζήτηση** για την εκμίσθωση δύο συντελεστών παραγωγής και στις **σχετικές τιμές** τους. Όταν π.χ. μειώνεται ο λόγος r/w (δηλαδή, όταν η εκμίσθωση μιας μονάδας κεφαλαίου γίνεται σχετικά πιο φθηνή σε σύγκριση με την εκμίσθωση μιας μονάδας εργασίας), τότε αυξάνεται, όπως φαίνεται και στο σχήμα 19, ο λόγος K/L, πράγμα που σημαίνει ότι, από την πλευρά των επιχειρήσεων, αυξάνεται η ζήτηση του σχετικά πιο φθηνού συντελεστή παραγωγής σε σύγκριση με την ζήτηση του σχετικά πιο ακριβού. Την πρόταση, ότι μια μείωση του λόγου r/w οδηγεί σε μια αύξηση του λόγου K/L, θα μπορούσαμε να την διατυπώσουμε και σε όρους **υποκατάστασης** των συντελεστών παραγωγής. Έτσι θα λέγαμε ότι, εάν η εκμίσθωση κεφαλαίου γίνει σχετικά πιο φθηνή σε σύγκριση με την εκμίσθωση εργασίας, τότε, στο πλαίσιο της παραγωγικής διαδικασίας, ο πιο φθηνός συντελεστής παραγωγής (δηλαδή το κεφάλαιο) θα υποκαταστήσει, έως έναν βαθμό, τον συντελεστή παραγωγής που έχει γίνει σχετικά πιο ακριβός (δηλαδή την εργασία).

Θεωρώντας ότι η καμπύλη υποκατάστασης στο σχήμα 19 παραμένει διαχρονικά στάσιμη (σταθερές αποδόσεις κλίμακας), επανερχόμαστε τώρα στον αρχικό μας προβληματισμό, επαναθέτοντας το ερώτημα: ποια επίπτωση θα έχει η μεταβολή της έντασης κεφαλαίου K/L στην διανομή του εισοδήματος Y μεταξύ μισθών W και κερδών Π; Επειδή ο λόγος Π/W, που τον συμβολίσαμε προηγουμένως με το γράμμα η, ισούται με το γινόμενο των λόγων r/w και K/L (βλ. 58), είναι προφανές ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου που σχηματίζεται από τις συντεταγμένες ενός δοσμένου σημείου της καμπύλης $r/w = \psi(K/L)$ στο σχήμα 19 θα μας δείχνει το μέγεθος του λόγου Π/W που αντιστοιχεί στον δοσμένο συνδυασμό των λόγων r/w και K/L[41]. Εάν πάρουμε λ.χ. το σημείο Α, όπου $K/L = OB$ και $r/w = O\Gamma$, τότε ο λόγος $\Pi/W = (r/w)(K/L)$ θα ισούται με το γινόμενο (ΟΒ)(ΟΓ) το οποίο, από άποψη γεωμετρική, είναι το εμβαδόν του σκιασμένου ορθογωνίου ΟΒΑΓ. Συνεπώς, για να διαπιστωθεί, εάν μια αύξηση της έντασης κεφαλαίου K/L, π.χ. από ΟΒ σε ΟΒ΄, θα αυξήσει, θα μειώσει ή θα αφήσει αμετάβλητο τον λόγο μεταξύ κερδών και μισθών Π/W, αρκεί να δούμε εάν η αύξηση του λόγου

[41] Στο συμπέρασμα αυτό είχαμε, έμμεσα, καταλήξει και στην §4.3.γ, όταν, ξεκινώντας από την σχέση 27. διαπιστώναμε πως το εμβαδόν του σκιασμένου ορθογωνίου στο σχήμα 9.β ισούται με τον λόγο $(KF_K)/(LF_L)$, δηλαδή με τον λόγο Π/W, αφού, σύμφωνα με την νεοκλασική λογική $KF_K = Kr = \Pi$ και $LF_L = Lw = W$.

K/L θα έχει ως συνέπεια να αυξηθεί, να μειωθεί ή να παραμείνει αμετάβλητο το εμβαδόν του σκιασμένου ορθογωνίου. Χαρακτηριστικό γνώρισμα της καμπύλης στο σχήμα 19 είναι ότι έχει κατά τέτοιο τρόπο σχεδιασθεί ώστε να διέρχεται από το σημείο Α με μιαν αρκετά απότομη κλίση σε σχέση με τον οριζόντιο άξονα. Για τον λόγο αυτό, η αύξηση της έντασης κεφαλαίου K/L κατά το ποσό ΒΒ΄ οδηγεί σε μια μείωση του λόγου r/w κατά ένα ποσό ΓΓ΄ το οποίο είναι τόσο μεγάλο, ώστε το εμβαδόν του νέου ορθογωνίου ΟΒ΄Α΄Γ΄ να είναι σαφώς μικρότερο από το εμβαδόν του αρχικού ορθογωνίου ΟΒΑΓ. Άρα, στην περίπτωση μιας καμπύλης υποκατάστασης που κλίνει πολύ απότομα προς τον οριζόντιο άξονα, η αύξηση της έντασης κεφαλαίου θα μειώνει το μέγεθος του διανεμητικού δείκτη η $(=\Pi/W)$, επηρεάζοντας την διανομή του εισοδήματος προς όφελος των μισθών. Ακριβώς το αντίθετο θα συνέβαινε, εάν η καμπύλη υποκατάστασης στο σχήμα 19 είχε έτσι σχεδιασθεί, ώστε να διέρχεται από το σημείο Α με μιαν αρκετά μικρή κλίση ως προς τον οριζόντιο άξονα. Στην περίπτωση αυτή η αύξηση της έντασης κεφαλαίου κατά το ποσό ΒΒ΄ θα οδηγούσε σε μια τόσο μικρή μείωση του λόγου r/w, ώστε να αυξανόταν τελικά το εμβαδόν του σκιασμένου ορθογωνίου. Τώρα, η αύξηση της έντασης κεφαλαίου θα λειτουργούσε προφανώς προς όφελος των κερδών, αφού θα αύξανε την αριθμητική τιμή του λόγου $\eta = \Pi/W$. Οι σκέψεις που προηγήθηκαν μπορούν να διατυπωθούν με ακόμα πιο σύντομο τρόπο, εάν χρησιμοποιηθεί η έννοια της ελαστικότητας υποκατάστασης σ (βλ. έκφραση 28). Στην §4.3.γ διαπιστώσαμε ότι όσο λιγότερο απότομη ως προς τον οριζόντιο άξονα είναι η κλίση της καμπύλης υποκατάστασης, τόσο μεγαλύτερη θα είναι η αιρθμητική τιμή της ελαστικότητας υποκατάστασης σ. Αναφερόμενοι λοιπόν σε αυτήν την αντίστροφη σχέση ανάμεσα στο μέγεθος της κλίσης της καμπύλης $r/w = \psi(K/L)$ στο σχήμα 19 και στο μέγεθος της ελαστικότητας σ, μπορούμε να αναδιατυπώσουμε ως εξής τα όσα είπαμε μόλις πριν από λίγο: η αύξηση της έντασης κεφαλαίου K/L λειτουργεί προς όφελος των κερδών ή προς όφελος των μισθών (αυξάνοντας ή μειώνοντας, αντίστοιχα, τον λόγο Π/W), ανάλογα με το εάν η αριθμητική τιμή της ελαστικότητας σ είναι αρκετά μεγάλη ή αρκετά μικρή. Βέβαια η διατύπωση αυτή είναι πολύ ασαφής, αφού δεν διευκρινίζεται, πότε η αριθμητική τιμή της ελαστικότητας σ θα πρέπει να θεωρείται ότι είναι «αρκετά μεγάλη» και πότε ότι είναι «αρκετά μικρή».

Αν θέλουμε να ξεκαθαρίσουμε την ασάφεια αυτή δεν μπορούμε πλέον να αποφύγουμε την προσφυγή στην αναλυτική διερεύνηση του όλου θέματος. Καταρχάς, συντομεύουμε τις εκφράσεις 58 και 59 γράφοντας

$$\eta = Rk \tag{58΄}$$

και

$$R = \psi(k)\,,\ \psi'(k) < 0 \tag{59΄}$$

όπου $\eta = \Pi/W$, $R = r/w$ και $k = K/L$. Προκειμένου να προσδιορίσουμε τον τρόπο με τον οποίο αντιδρά ο διανεμητικός δείκτης η σε μεταβολές της έντασης κεφαλαίου k θα πρέπει να μελετήσουμε τους παράγοντες που καθορίζουν το πρόσημο της παραγώγου $d\eta/dk$. Εάν παραγωγίσουμε λοιπόν την 58΄ ως προς k, λαμβάνοντας υπόψη το γεγονός ότι η μεταβλητή R είναι συνάρτηση της μεταβλητής k (βλ. 59΄), έχουμε, βάσει του αλυσωτού κανόνα:

$$\frac{d\eta}{dk} = R + k\frac{dR}{dk}$$

ή, αλλιώς,

$$\frac{d\eta}{dk} = R\left(1 + \frac{k}{R}\frac{dR}{dk}\right).$$

Επειδή ο ορισμός της ελαστικότητας σ (βλ. 28) μας επιτρέπει να αντικαταστήσουμε τον όρο $(k/R)(dR/dk)$ με τον όρο $-1/\sigma$, η έκφραση αυτή αποκτά τελικά την μορφή

$$\frac{d\eta}{dk} = \left(\frac{\sigma - 1}{\sigma}\right)R. \qquad (60)$$

Αφού ο λόγος $r/w = R$ και η ελαστικότητα σ είναι θετικοί αριθμοί, προκύπτει αμέσως από την 60 ότι το πρόσημο της παραγώγου $d\eta/dk$ εξαρτάται μόνον από το μέγεθος της ελαστικότητας υποκατάστασης σ: μια αύξηση της έντασης κεφαλαίου k θα έχει ως συνέπεια να αυξηθεί, να μειωθεί ή να παραμείνει αμετάβλητος ο λόγος μεταξύ κερδών και μισθών η, ανάλογα με το εάν η αριθμητική τιμή της ελαστικότητας σ τυχαίνει να είναι μεγαλύτερη, μικρότερη ή ίση της μονάδας. Τούτο γίνεται ακόμα πιο εμφανές εάν η 60 αναδιατυπωθεί κατά τέτοιο τρόπο ώστε να εκφράζει την σχέση όχι ανάμεσα στις απόλυτες αλλά ανάμεσα στις σχετικές (ποσοστιαίες) μεταβολές των μεταβλητών η και k. Αντικαθιστώντας στην 60 τον όρο R με τον ισοδύναμο η/k (βλ. 58΄) έχουμε, μετά από κάποιες απλές αριθμητικές πράξεις, την ακόλουθη παραλλαγή της 60

$$\frac{d\eta}{\eta} = \left(\frac{\sigma - 1}{\sigma}\right)\frac{dk}{k}, \qquad (60΄)$$

από την οποία φαίνεται αμέσως ότι το πρόσημο του συσχετισμού ανάμεσα στις ποσοστιαίες μεταβολές $d\eta/\eta$ και dk/k καθορίζεται από το κατά πόσο το μέγεθος της ελαστικότητας σ είναι μεγαλύτερο, ίσο ή μικρότερο του ενός. Το μήνυμα που εκπέμπει η έκφραση 60 (ή, εναλλακτικά, η έκφραση 60΄) είναι καίριας σημασίας καθότι εκφράζει μια από τις πλέον σημαντικές αλλά ταυτόχρονα και τις πλέον αμφιλεγόμενες θέσεις της νεοκλασικής θεωρίας. Μιας θέσης που διατείνεται ότι, υπό καθεστώς τέλειου ανταγωνισμού, η **διανομή** του εισοδήματος μεταξύ μισθών και κερδών δεν εξαρτάται, μεταξύ άλλων, και από κοινωνικές δομές και από κοινωνικές σχέσεις, αλλά καθορίζεται, αποκλειστικά και μόνον, από τις ιδιότητες της δοσμένης **τεχνολογίας**. Και συγκεκριμένα από το μέγεθος μιας τεχνικής παραμέτρου, της **ελαστικότητας υποκατάστασης** σ, η οποία εκφράζει, όπως διαπιστώσαμε στην §4.3.γ, τον **βαθμό κυρτότητας** της μακροοικονομικής συνάρτησης παραγωγής ή, με άλλα λόγια, τον βαθμό **τεχνικής υποκαταστασιμότητας** των συντελεστών παραγωγής «κεφάλαιο» και «εργασία».

(β) Μια πολύ ειδική περίπτωση: γραμμικά ομογενείς συναρτήσεις τύπου Cobb-Douglas

Το πρόβλημα και με τις τρεις βασικές παραδοχές που έχουν μέχρι στιγμής υιοθετηθεί σχετικά με την μορφή της συνάρτησης παραγωγής $Y = F(K, L)$ είναι ότι έχουν πολύ λίγα πράγματα να μας πουν για το μέγεθος της ελαστικότητας υποκατάστασης σ καθώς και για την συμπεριφορά της, όταν μεταβάλλονται οι τιμές των μεταβλητών K και L. Αυτό που προκύπτει από τις δύο πρώτες παραδοχές (διπλή παραγωγισιμότητα και κυρτότητα) είναι η σχεδόν αυτονόητη και όχι και τόσο χρήσιμη πρόταση ότι η ελαστικότητα σ αποτελεί συνεχή συνάρτηση των μεταβλητών K και L και ότι το μέγεθός της είναι πάντοτε ένας θετικός αριθμός. Η πρόταση αυτή, που της δίνουμε συναρτησιακή μορφή γράφοντας $\sigma = \sigma(K, L) > 0$, μπορεί εύκολα να επιβεβαιωθεί από τον ορισμό 28, εάν σκεφθεί κανείς ότι τόσο η ένταση κεφαλαίου k όσο και ο λόγος $R = -dL/dK$ είναι συναρτήσεις των μεταβλητών K και L, αφού $k = K/L$ και

$$R = -dL/dK = F_K(K, L)/F_L(K, L) \equiv R(K, L).$$

Η μόνη συνέπεια που έχει για την ελαστικότητα σ η υιοθέτηση της τρίτης παραδοχής (γραμμική ομογένεια της συνάρτησης παραγωγής) είναι ότι μας επιτρέπει να αναδιατυπώσουμε την συνάρτηση $\sigma = \sigma(K, L)$ σε εντατικούς όρους και να γράψουμε $\sigma = \sigma(k)$. Για να αποδείξουμε ότι, στην περίπτωση σταθερών αποδόσεων κλίμακας, η ελαστικότητα υποκατάστασης σ αποτελεί συνάρτηση της έντασης κεφαλαίου k, θα πρέπει να θυμηθούμε ότι, στην περίπτωση αυτή, τα οριακά προϊόντα F_K και F_L μπορούν να διατυπωθούν σε εντατική γραφή και να γραφούν ως συναρτήσεις της μεταβλητής k (βλ. εκφράσεις 53 και 54). Τούτο όμως σημαίνει ότι και ο οριακός λόγος τεχνικής υποκατάστασης R $(= F_K/F_L)$ θα είναι και αυτός συνάρτηση της έντασης κεφαλαίου k: $R = R(k)$. Το ίδιο θα πρέπει βέβαια να ισχύει και για την παράγωγο της συνάρτησης $R = R(k): dR/dk = R'(k)$. Εάν κάνουμε λοιπόν τον κόπο να διατυπώσουμε ρητά, με την βοήθεια των συναρτήσεων 53 και 54, τις συναρτήσεις $R = R(k)$ και $dR/dk = R'(k)$ και, κατόπιν, να εισαγάγουμε τις τελευταίες στον ορισμό 28, έχοντας προηγουμένως φροντίσει να αναδιατάξουμε τους όρους του τελευταίου γράφοντας

$$\sigma = -\frac{R/k}{dR/dk}$$

θα διαπιστώσουμε, μετά από μια σειρά αριθμητικών πράξεων, ότι η ζητούμενη συνάρτηση $\sigma = \sigma(k)$ έχει την ακόλουθη, ομολογουμένως κάπως περίπλοκη, μορφή:

$$\sigma = \sigma(k) = -\frac{f'(f - kf')}{kff''} > 0 \qquad (61)$$

όπου, για λόγους απλούστευσης της γραφής, χρησιμοποιούμε τα σύμβολα f, f′ και f″ αντί των συναρτησιακών συμβολισμών $f(k)$, $f'(k)$ και $f''(k)$. Το θετικό πρόσημο της ελαστικότητας σ προκύπτει από την 61, αφού $f' = F_K > 0$ και $f - kf' = F_L > 0$ ενώ, λόγω της παραδοχής περί φθίνοντος οριακού προϊόντος του κεφαλαίου, $f'' = F_{KK} < 0$.

Το γεγονός ότι η ελαστικότητα υποκατάστασης σ δεν είναι μια σταθερά αλλά αποτελεί συνάρτηση της έντασης κεφαλαίου k, σχετικοποιεί σε μεγάλο βαθμό την βαρύτητα της νεοκλασικής θέσης σύμφωνα με την οποία η διανομή του εισοδήματος καθορίζετια μόνον από το μέγεθος της ελαστικότητας σ. Αυτό που εκφράζεται ξεκάθαρα από την 61 είναι ότι, ανάλογα με το επίπεδο της έντασης κεφαλαίου k, το μέγεθος της ελαστικότητας σ μπορεί να είναι, άλλοτε μεγαλύτερο, άλλοτε μικρότερο και άλλοτε ίσο του ενός. Τούτο όμως σημαίνει (βλ. 60 ή 60΄), ότι η νεοκλασική θεωρία δεν είναι σε θέση, βάσει των παραδοχών που έχουν υιοθετηθεί μέχρι στιγμής, να απαντήσει μονοσήματα στο ερώτημα, εάν η αύξηση (ή, η μείωση) της έντασης κεφαλαίου λειτουργεί προς όφελος των κερδών, ή προς όφελος των μισθών ή εάν είναι διανεμητικά ουδέτερη. Προκειμένου να αποφύγει την εμπλοκή της σε οικονομικού τύπου επιχειρήματα που ενδεχομένως να ανέτρεπαν την εσωτερική της λογική, η νεοκλασική θεωρία παρακάμπτει συνήθως το ερώτημα αυτό προικίζοντας την έννοια της τεχνολογίας με νέες ιδιότητες. ακόμα πιο θαυματουργές, από αυτές με τις οποίες την έχει ήδη προικίσει μέσω των τριών βασικών παραδοχών που αναφέρθηκαν στην αρχή. Έτσι στη νεοκλασική θέση που θέλει την διανομή του εισοδήματος να καθορίζεται, αποκλειστικά και μόνο, από την δοσμένη τεχνολογία (για την οποία έχει ήδη υποτεθεί ότι είναι διπλά παραγωγίσιμη, κυρτή και γραμμικά ομογενής) προστίθεται συνήθως και η θέση ότι η τεχνολογία θα πρέπει να είναι τέτοιας μορφής ώστε η διανομή του εισοδήματος να παραμένει σταθερή και να μην μεταβάλλεται, όταν μεταβάλλεται η ένταση κεφαλαίου k (διανεμητικά ουδέτερη τεχνολογία). Μεταφρασμένη σε όρους της έκφρασης 60, η δεύτερη αυτή θέση ισοδυναμεί με την απαίτηση ότι η παράγωγος $d\eta/dk$ θα πρέπει να ισούται με το μηδέν, πράγμα που είναι δυνατό να διασφαλισθεί (πάλι σύμφωνα με την 60) μόνον εάν υποτεθεί ότι το μέγεθος της ελαστικότητας υποκατάστασης σ ισούται πάντοτε με την μονάδα, ανεξάρτητα της τιμής των μεταβλητών K και L και συνεπώς και της τιμής της έντασης κεφαλαίου $k\ (=K/L)$.

Στο σημείο αυτό τίθεται φυσικά το ακόλουθο ερώτημα: ποια θα πρέπει να είναι η μορφή της συνάρτησης $Y=F(K,L)$ – ή, εναλλακτικά, η μορφή της συνάρτησης $y=f(k)$, αφού η συνάρτηση $Y=F(K,L)$ υποτίθεται ότι είναι γραμμικά ομογενής – προκειμένου να διασφαλισθεί εκ προϊμίου η **διανεμητική ουδετερότητα της τεχνολογίας** και να ισχύει ότι $\sigma=1$ για όλες τις τιμές της μεταβλητής $k\ (=K/L)$; Για να απαντήσουμε στο ερώτημα αυτό, θα αρχίσουμε από μια αυτονόητη παρατήρηση. Αν είναι να ισχύει ότι $\sigma=1$ για όλες τις τιμές της έντασης κεφαλαίου k, θα πρέπει, σύμφωνα με την 61, να ισχύει επίσης και η συνθήκη:

$$f'(f-kf')=-kff''.$$

Επειδή όμως $w=f-kf'$ (βλ. 54΄) και $dw/dk=-kf''$, η συνθήκη αυτή μπορεί και να αναδιατυπωθεί και ως εξής:

$$f'w=f\frac{dw}{dk}.$$

Αντικαθιστώντας στην έκφραση αυτή τα σύμβολα f και f΄ με τα ισοδύναμά τους y και dy/dk και πολλαπλασιάζοντας και τις δύο πλευρές της με dk, καταλήγουμε, μετά από τις σχετικές απλοποιήσεις και αναδιατάξεις όρων, στο συμπέρασμα ότι:

$$\frac{dy}{y} = \frac{dw}{w}.$$

Η ολοκλήρωση της έκφρασης αυτής μας δίνει την λογαριθμική συνάρτηση $\ln y = \ln w + B$, όπου B μια σταθερά. Εφαρμόζοντας στην συνάρτηση αυτή τον λογαριθμικό ορισμό 4 έχουμε

$$y = e^{\ln w + B} = e^{B} e^{\ln w}$$

φτάνοντας έτσι, με την βοήθεια της ταυτολογίας 9, στην γραμμική σχέση $y = Cw$, όπου $C = \exp B$ μια σταθερά. Εάν πάρουμε τώρα την σχέση $y = Cw$ και θέσουμε στην θέση της μεταβλητής w την έκφραση 54΄ – αφού τροποποιήσουμε προηγουμένως τους συμβολισμούς της τελευταίας, γράφοντας $w = y - k(dy/dk)$ – θα έχουμε ως αποτέλεσμα, μετά τις σχετικές αριθμητικές πράξεις, την έκφραση

$$\frac{dy}{y} = \alpha \frac{dk}{k},$$

όπου $\alpha = (C-1)/C$. Η ολοκλήρωση της έκφρασης αυτής μας δίνει την συνάρτηση $\ln y = \alpha \ln k + E$ από την οποία προκύπτει, μετά την εφαρμογή του κανόνα 4, ότι

$$y = e^{\alpha \ln k + E} = e^{E} \left(e^{\ln k}\right)^{\alpha}$$

και κατά συνέπεια, βάσει της ταυτολογίας 9, ότι

$$y = Ak^{\alpha}, \tag{62}$$

όπου $A = \exp E$ μια σταθερά. Η απάντηση στο αρχικό μας ερώτημα έχει λοιπόν ως εξής: η ελαστικότητα υποκατάστασης σ θα ισούται πάντοτε με την μονάδα, ανεξάρτητα του μεγέθους της έντασης κεφαλαίου k, μόνον εάν η συνάρτηση παραγωγής, στην εντατική της γραφή $y = f(k)$, είναι της μορφής 62[42] ή, εναλλακτικά, μόνον εάν η συνάρτηση παραγωγής, στην αρχική της εκδοχή $Y = F(K, L)$, είναι της μορφής

$$Y = AK^{\alpha}L^{1-\alpha} \tag{63}$$

και αυτό επειδή η 63 προκύπτει από την 62, εάν αντικαταστήσει κανείς στην τελευταία τις μεταβλητές y και k με τους λόγους Y/L (=y) και K/L (=k).

Η συνάρτηση 63 αποτελεί μιαν ειδική περίπτωση της συνάρτησης

$$Y = AK^{\alpha}L^{\beta}, \tag{64}$$

η οποία, στην οικονομική ορολογία, είναι γνωστή με το όνομα **συνάρτηση Cobb-Douglas**. Εκτελώντας τις πράξεις που προβλέπονται από τις συνθήκες 22 και 23 μπορεί κανείς να δείξει ότι η συνάρτηση 64 είναι διπλά παραγωγίσιμη και κυρτή καθώς και ότι

---

[42] Υπολογίζοντας την πρώτη και την δεύτερη παράγωγο της 62 και εισαγάγοντάς τες, μαζί με την 62, στον ορισμό 61, μπορεί κανείς να αποδείξει ότι ισχύει και το αντίστροφο της πρότασης αυτής. Ότι ισχύει, δηλαδή, πως στην περίπτωση της συνάρτησης 62 η ελαστικότητα υποκατάστασης σ είναι ίση με την μονάδα.

οι μερικές ελαστικότητες της παραγωγής ως προς K και ως προς L (βλ. 26) ισούνται, αντίστοιχα, με τους εκθέτες α και β ($\varepsilon_K = \alpha$, $\varepsilon_L = \beta$). Χωρίς ιδιαίτερη δυσκολία μπορεί επίσης να επιβεβαιωθεί ότι η συνάρτηση 64 εκπληροί τις απαιτήσεις της συνθήκης 25, πράγμα που σημαίνει ότι οι καμπύλες ίσου προϊόντος της 64 είναι κυρτές ως προς την αρχή των αξόνων. Επειδή για την συνάρτηση 64 ισχύει, βάσει του ορισμού 33, ότι

$$A(\lambda K)^{\alpha}(\lambda L)^{\beta} = \lambda^{\alpha+\beta}\left(AK^{\alpha}L^{\beta}\right)$$

είναι προφανές ότι η συνάρτηση 64 είναι επίσης και ομογενής και ότι ο βαθμός ομογένειάς της ρ ισούται με το άθροισμα των εκθετών α και β ($\rho = \alpha + \beta$). Τελικά, θα πρέπει να σημειωθεί ότι, λογαριθμίζοντας την συνάρτηση 64, την μετασχηματίζουμε σε μια γραμμική συνάρτηση μεταξύ των μεταβλητών lnY, lnK και lnL

$$\ln Y = \ln A + \alpha \ln K + \beta \ln L \qquad (65)$$

γεγονός που καθιστά πολύ δελεαστική, και για πρακτικούς λόγους, την χρησιμοποίηση συναρτήσεων Cobb-Douglas σε εμπειρικές και οικονομετρικές μελέτες. Παραγωγίζοντας την 65 ως προς τον χρόνο t, εντοπίζουμε αμέσως, με την βοήθεια του κανόνα 13, και την γραμμική σχέση που συνδέει τους ρυθμούς μεγέθυνσης των μεταβλητών Y, K και L:

$$g_Y = \alpha g_K + \beta g_L \, . \qquad (66)$$

Η σχέση αυτή μοιάζει με την 31, με την μόνη διαφορά ότι τώρα οι ελαστικότητες ε_K και ε_L δεν είναι πλέον συναρτήσεις των μεταβλητών K και L αλλά αποτελούν σταθερές που μας δίνονται από τους εκθέτες α και β της συνάρτησης Cobb-Douglas.

Τα όσα λέχθηκαν προηγουμένως σχετικά με την συνάρτηση 64 ισχύουν φυσικά και για την συνάρτηση 63. Ανάμεσα στις δύο αυτές συναρτήσεις υπάρχει ωστόσο μια σημαντική διαφορά: η συνάρτηση 63 δεν είναι γενικά ομογενής, όπως είναι η συνάρτηση 64, αλλά ομογενής πρώτου βαθμού (σταθερές αποδόσεις κλίμακας), αφού στην περίπτωση της 63 το άθροισμα των εκθετών α και β ($=1-\alpha$) ισούται προφανώς με την μονάδα. Και όπως διαπιστώσαμε πριν από λίγο, στην γραμμική ομογένεια της συνάρτησης 63 οφείλεται το γεγονός ότι αυτή είναι η μόνη συνάρτηση για την οποία ισχύει ότι η ελαστικότητα υποκατάστασης είναι ίση με την μονάδα ($\sigma = 1$). Εξαιτίας της γραμμικής ομογένειάς της, η συνάρτηση 63 διαθέτει και κάποιες άλλες ιδιότητες που δεν τις διαθέτει η συνάρτηση 64. Το γεγονός ότι το άθροισμα των εκθετών της 63 ισούται με την μονάδα σημαίνει ότι οι εκθέτες α και $\beta = 1-\alpha$, που είναι θετικοί αιρθμοί, θα πρέπει να είναι, επιπλέον, και μικρότεροι της μονάδας ($0<\alpha<1,\ 0<1-\alpha<1$). Σημειώνουμε επίσης ότι η ιδιότητα της γραμμικής ομογένειας ήταν η ιδιότητα εκείνη που μας επέτρεψε, πριν από λίγο, να αναδιατυπώσουμε την 63 σε εντατικούς όρους και να της δώσουμε την μορφή 62. Από την άλλη μεριά, μέσω της έκφρασης 62, βρίσκουμε αμέσως και την σχέση που συνδέει τον ρυθμό μεγέθυνσης του προϊόντος ανά εργαζόμενο y με τον ρυθμό μεγέθυνσης της έντασης κεφαλαίου k. Λογαριθμίζοντας την 62 έχουμε την έκφραση

$$\ln y = \ln A + \alpha \ln k \,,$$

την οποία την παραγωγίζουμε ως προς τον χρόνο t για να καταλήξουμε, μέσω του κανόνα 14, στην ζητούμενη σχέση ανάμεσα στους ρυθμούς μεγέθυνσης g_y και g_k :

$$g_y = \alpha g_k \,. \tag{67}$$

Ας σημειωθεί ότι η σχέση αυτή προκύπτει επίσης και από την εισαγωγή στην 66 της παραδοχής περί σταθερών αποδόσεων κλίμακας ($\beta = 1-\alpha$):

$$g_Y = \alpha g_K + (1-\alpha) g_L \,. \tag{68}$$

Αναδιατάσσοντας τους όρους της 68 έχουμε:

$$g_Y - g_L = \alpha (g_K - g_L)\,,$$

πράγμα που μας οδηγεί απ' ευθείας στην 67 αφού οι ορισμοί $Y/L = y$ και $K/L = k$ συνεπάγονται ότι $g_Y - g_L = g_y$ και $g_K - g_L = g_k$[43]. Ένα άλλο πρακτικό πλονέκτημα της συνάρτησης Cobb-Douglas είναι ότι διευκολύνει κατά πολύ τον αναλυτικό χειρισμό της αντίληψης περί τεχνικής προόδου για την οποία έγινε λόγος στην §4.4.β. Στον βαθμό που θεωρούμε πως η τεχνική πρόοδος είναι εξωγενής και δεν ενσωματώνεται στους συντελεστές παραγωγής, τότε η επίδραση της τεχνικής προόδου στην διαχρονική αύξηση του προϊόντος Y μπορεί να εκφρασθεί από την παραδοχή ότι το μέγεθος της παραμέτρου A στην συνάρτηση 63 δεν είναι πλέον μια σταθερά αλλά ότι αυξάνεται διαχρονικά βάσει μιας δοσμένης χρονικής συνάρτησης $A = A(t)$, όπου $dA/dt \equiv A'(t) > 0$. Εάν ξεκινούσαμε λοιπόν από την συνάρτηση $Y = A(t)K^{\alpha}L^{1-\alpha}$ και επαναλαμβάναμε τα αναλυτικά βήματα που μας έφεραν προηγουμένως στις εκφράσεις 67 και 68, θα καταλήγαμε στην διευρυμένη εκδοχή τους

$$g_y = \alpha g_k + m \tag{67΄}$$

και

$$g_Y = \alpha g_K + (1-\alpha) g_L + m \tag{68΄}$$

όπου $m = A'(t)/A(t)$ ο εξωγενώς δοσμένος ρυθμός της τεχνικής προόδου[44]. Και μια τελική παρατήρηση. Εάν θέλαμε να διατυπώσουμε τις εκφράσεις 67΄ και 68΄ σε όρους διανομής του εισοδήματος, θα αντικαθιστούσαμε απλώς το σύμβολο α από το σύμβολο α_Π που εκφράζει το μερίδιο των κερδών Π στο συνολικό εισόδημα Y ($\alpha_\Pi = \Pi/Y$). Και αυτό επειδή ο εκθέτης α στην συνάρτηση Cobb-Douglas 63 ισούται με την μερική ελαστικότητα της παραγωγής ε_K ($\alpha = \varepsilon_K$), ενώ η ελαστικότητα αυτή, σύμφωνα με την νεοκλασική λογική (βλ. 42), δεν είναι τίποτε άλλο παρά το εισοδηματικό μερίδιο α_Π ($\varepsilon_K = \alpha_\Pi$).

---

[43] Στην σχέση 67 μπορούμε να καταλήξουμε επίσης, ξεκινώντας από την έκφραση 57. Αρκεί να θυμήσουμε ότι, στην περίπτωση της συνάρτησης Cobb-Douglas 63, η ελαστικότητα ε_K είναι μια σταθερά που ισούται με τον εκθέτη α.

[44] Οι εκφράσεις 67΄ και 68΄ προκύπτουν επίσης και από τις εκφράσεις 31΄ και 32, εάν αντικατασταθούν οι ελαστικότητες ε_K και ε_L από τους εκθέτες α και $1-\alpha$.